Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

9. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen. Die Musterlösung der schriftlichen Hausaufgaben wird Freitags veröffentlicht.

9.1. Schriftlich: (a)-(d) – 10 Punkte. Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

(a) Sei $f(x, y) := x^T Ay$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Sei $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + e_3$ und $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$. Berechnen Sie:

- $f(e_1', e_2')$,
- $\mathrm{Span}(e_1')^\perp := \{v \in V \mid f(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in \mathrm{Span}(e_1')\}$,
- die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis e_1', e_2', e_3'.

(b) Seien f eine Bilinearform auf V und $p, q \in \mathrm{End(V)}$, seien F, P, Q die Matrizen von f, p, q bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V. Stellen Sie die Matrix der Bilinearform $f(p(x), q(y))$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ durch die Matrizen F, P, Q dar.

(c) Sei f eine Bilinearform vom Rang 1. Beweisen Sie, dass es $h, g \in V^*$ gibt, sodass $f(x, y) = h(x)g(y)$. (Unter dem Rang von f verstehen wir hier der Rang der Abbildung $f_1 : V \to V^*$ aus Proposition 6.7.)

(d) Seien $V = \mathbb{R}^n$ und U_1, U_2 zwei Unterräume von V mit $\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = \dim_{\mathbb{R}}(U_2)$. Weiter sei s eine symmetrische Bilinearform auf V mit folgenden Eigenschaften:

- Für $x, y \in U_1$ gilt $s(x, y) = 0$.
- Für $x, y \in U_2$ gilt $s(x, y) = 0$.
- Bezüglich s gilt $U_1 \cap U_2^\perp = 0$.

Beweisen Sie, dass die Bilinearform $s_{|U_1+U_2}$ nicht-ausgeartet ist.

9.2. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Seien $V = M_2(K)$ und $\beta(A, B) := \mathrm{Sp}(AB)$ eine Bilinearform. Die Bilinearform β ist nicht-ausgeartet.

(b) Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$. Es gibt eine Bilinearform $f \neq 0$ auf V mit $f(x, y) = \epsilon f(y, x)$ und $\epsilon \notin \{1, -1\}$.

(c) Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $\sigma(f, g) = \Sigma_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)g^{(m)}(0)$ die Bilinearform aus Beispiel 6.6. Die Bilinearform $\sigma(f, g)$ ist ausgeartet.

(d) Sei $V = \mathbb{R}^n$ und s eine symmetrische Bilinearform mit $s(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$. Die Menge $U := \{v \in V \mid s(v, v) = 0\}$ ist ein Unterraum von V.

(e) Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit n ungerade. Sei $f := x^T Fy$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform mit $F \in M_n(\mathbb{R})$. Es gibt keine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[f]_{\mathcal{B}} = -F$ ist. Was können Sie sagen, falls n gerade ist?