Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

10. Übungsblatt
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben. Sie werden in den einzelnen Übungsgruppen in Ilias in der Kalenderwoche des Abgabetermins diskutiert, und es gibt keine separaten Musterlösungen. Die Musterlösung der schriftlichen Hausaufgaben wird Freitags veröffentlicht.

10.1. Schriftlich: (a)-(d) – 9 Punkte. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Sei $f(x,y) := x^T Ay$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Matrix P unter Verwendung elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen, sodass $P^T AP = D$ mit einer Diagonalmatrix D.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt und sei $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von Span($\mathcal{B}$) mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens.

(c) Sei V ein pseudo-euklidischer Vektorraum, das heißt: V ist $\mathbb{R}^n$ mit der symmetrischen Bilinearform $s(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i$. Sei $W \leq V$ ein Unterraum von V. Beweisen Sie, dass

- wenn $s(-,-)|_W$ positiv definit ist, ist dim$W \leq p$;
- wenn $s(-,-)|_W = 0$ ist, ist dim$W \leq min\{p, n-p\}$;
- wenn $p \neq 0, n$ ist, hat V eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $s(v_i, v_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(d) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a^{-i} \right) \geq n^2.$$

Für welche a gilt die Gleichung?

[*Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, auch bekannt als Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung.*]

10.2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei dim$V = n$ und sei β eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V. Die Dimension eines Unterraums $U \leq V$ mit $\beta|_U = 0$ ist nicht größer als $n/2$. Es existiert ein V und ein Unterraum $U \leq V$ der Dimension $n/2$ sowie eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform β mit $\beta|_U = 0$.

(b) Es gibt zwei symmetrische Bilinearformen f, g, sodass $f \neq g$ und $f(x,x) = g(x,x)$ für alle $x \in V$.

(c) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$. Die Vektoren $x - y$ und $x + y$ sind genau dann orthogonal, wenn $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle$.

(d) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\{v_1, \ldots v_n\}$ eine Basis von V. Sei $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Sei $\{v'_1, \ldots v'_n\} \in V$ die mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens erhaltene Basis und $G' = (\langle v'_i, v'_j \rangle)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Dann ist $\det G = \det G'$.

(e) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\{v_1, \ldots v_n\}$ eine Basis von V. Sei $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $\det G > 0$.