Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

Selbsttest
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Dieser Selbsttest dient der Vorbereitung auf die Klausur. Rechnen Sie die Aufgaben bitte selbstständig und ohne Hilfsmittel (Taschenrechner, Computer-Algebra-Programme, etc.) durch, um Ihr Wissen zu testen. Die Bearbeitungszeit sollte etwa bei 90 Minuten bis 2 Stunden liegen, abhängig von Ihrem aktuellen Kenntnisstand der Sätze der Vorlesung. In Ilias finden Sie einen anonymisierten Test zur Selbstkontrolle über diese Aufgaben – ähnlich zu den Online-Übungsblättern, jedoch ohne, dass wir Ihren Namen mit der Abgabe verbinden können. Zudem wird nach dem Abschicken der Antwort zu einer Frage die korrekte Lösung gegeben, weshalb der Test von jedem nur einmal durchgeführt werden kann. Entsprechend bitten wir Sie sich die Lösungen selber zu notieren, falls Sie auf diese zu einem späteren Zeitpunkt nochmal zugreifen wollen. Direkt im Anschluss an den Ilias-Selbsttest leiten wir Sie zu einer ebenfalls anonymen Ilias-Umfrage weiter, in der wir die in der Vorlesung behandelten Themen und mögliche Probleme mit diesen Themen abfragen. Dieser Test und die zugehörige Umfrage laufen von Mittwoch 10. Juni, 11:00 Uhr bis Dienstag 16. Juni, 11:00 Uhr.

Wir nutzen Ihre Rückmeldungen im Ilias-Selbsttest und aus der Ilias-Umfrage zur Vorbereitung weiterer Vortragsübungen, insbesondere dem Klausurtraining. Daher bitten wir Sie um rege und ehrliche Teilnahme, sodass wir unsere Übungsmaterialien möglichst optimal auf Ihre Bedürfnisse abstimmen können.

1.1. Gegeben sind die Polynome $f = X^5 + X^4 + 1$, $g = X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $d = \mathrm{ggT}(f, g)$.

(b) Bestimmen Sie Polynome $u, v \in \mathbb{Q}[X]$ mit $d = \mathrm{ggT}(f, g) = uf + vg$.

(c) Schreiben Sie g als Produkt irreduzibler Polynomen in $\mathbb{Q}[X]$.

(d) Gibt es eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ mit $f(a) = 0$?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1.2. Gegeben sind Matrizen $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Welche von den Matrizen A, B und C sind diagonalisierbar?

(b) Welche von den Matrizen A, B und C sind triagonalisierbar?

(c) Falls $M \in \{A, B, C\}$ diagonalisierbar ist, bestimmen Sie eine Matrix P, sodass PMP^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

(d) Falls $M \in \{A, B, C\}$ trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar ist, bestimmen Sie eine Matrix Q, sodass QMQ^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1.3. Gegeben sei Matrix $E \in M_4(\mathbb{R})$ mit

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_E von E.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_E von E.

(c) Gibt es zu E eine invertierbare Matrix P, derart, dass $PEP^{-1} =: X$ in Jordan-Normalform ist? Falls ja, bestimmen Sie X.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1.4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Wenn $z \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f ist, ist auch $\bar{z}$ ein Eigenwert von f.

(b) Für $n \geq 3$ gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu f.

(c) Wenn das Minimalpolynom zu f irreduzibel ist, so ist f diagonalisierbar.

(d) Es gibt einen f-invarianten Unterraum $U \subseteq \mathbb{C}^n$ mit $\dim_{\mathbb{C}}(U) = 1$.

(e) Seien $n \geq 2$, K ein Körper und $A \in M_n(K)$ eine nilpotente Matrix, sodass $A^{n-1} \neq 0$. Dann gibt es keine Matrix $B \in M_n(K)$, sodass $B^2 = A$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.