Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

2. Selbsttest
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020

Dieser Selbsttest bietet weiteres Übungsmaterial zu den Kapitel 5-8. In Ilias finden Sie Lösungshinweise zu diesem Selbsttest. Um einen bestmöglichen Lernerfolg zu erziehen, sollten Sie die Lösungshinweise erst nach eigenständiger Bearbeitung der Aufgaben nutzen.

2.1. Gegeben sind die reellen Vektorräume $V := \mathbb{R}_2[X]$ und $W := \mathbb{R}^3$ mit zugehörigen Basen

$$\mathcal{B}_V := \{v_0, v_1, v_2\} \text{ mit } v_i := (X-1)^i\,, \qquad \mathcal{B}_W = \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\}\,.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}_V^*$ und $\mathcal{B}_W^*$ die zugehörigen dualen Basen.

(a) Bestimmen Sie die duale Basis $\mathcal{B}_W^*$.

(b) Seien $U_V := \{v \in V | v(1) = v(2)\} \leq V$ und $U_W := \operatorname{Span}\{(2,-3,1)^T\} \leq W$ Unterräume von V bzw. W. Bestimmen Sie die orthogonalen Räume $U_V{}^\circ$ und $U_W{}^\circ$.

(c) Sei $T : V \to W : p \mapsto (p(0), p(1), p'(1))^T$, wobei p' die Ableitung zu $p \in \mathbb{R}[X]$ bezeichnet. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}_V^*}^{\mathcal{B}_W^*}(T^*)$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}_V^*$ und $\mathcal{B}_W^*$.

2.2. Gegeben ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})\,.$$

Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform F_A von A und eine Basiswechselmatrix P mit $P^{-1}AP = F_A$.

2.3. Sei $\psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform definiert durch

$$\psi(x,y) = 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - x_3y_3 + 4x_4y_4,$$

wobei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von ψ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie zudem eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$ an, sodass die darstellende Matrix von ψ bezüglich $\mathcal{C}$ Diagonalgestalt hat, und geben Sie die zugehörige Diagonalmatrix D an. Entscheiden Sie, ob ψ positiv definit ist.

2.4. Betrachten Sie einen n-dimensionalen Hyperwürfel Q mit den Ecken $(i_1, \ldots, i_n)$, $i_j \in \{0,1\}$ für $1 \leq n$ als Teilmenge des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt. Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Ecken $(i_1, \ldots, i_n)$ und $(i'_1, \ldots, i'_n)$ mit $i_l = i'_l$ für alle $1 \leq l \leq n$ außer einem wird eine Kante genannt. Die Verbindungsstrecke zwischen zwei verschiedenen Ecken, die nicht eine Kante ist, wird eine Diagonale genannt.

(a) Sei eine Kante fest gewählt, die vom Ursprung $(0, \ldots, 0)$ ausgeht. Wie viele Diagonalen von Q, die ebenfalls vom Ursprung $(0, \ldots, 0)$ ausgehen, sind zu dieser fixierten Kante orthogonal? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie die Länge der Orthogonalprojektion einer Kante von Q, die vom Ursprung $(0, \ldots, 0)$ ausgeht, auf die Hauptdiagonale, also zur Verbindungsstrecke zwischen $(0, \ldots, 0)$ und $(1, \ldots, 1)$. Dabei wird mit der Orthogonalprojektion von v auf u derjenige Vektor v_U bezeichnet, sodass $v = v_U + v_{U^\perp}$ mit $v_U \in \operatorname{Span}(u)$ und $v_{U^\perp} \in \operatorname{Span}(u)^\perp$.

2.5. Im unitären Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit Standard-Skalarprodukt sei bezüglich der Standardbasis der Endomorphismus T_A durch folgende Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist A hermitesch? Ist A unitär? Ist T_A selbstadjungiert? Welche Matrix beschreibt die adjungierte Abbildung T_A^* bezüglich der Standardbasis?

(b) Ist A bezüglich einer Orthonormalbasis diagonalisierbar? Wenn ja, bringen Sie A in Diagonalform durch bestimmen einer geeigneten Orthonormalbasis.

2.6. Sei V ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum und seien $\{u, v, w\} \in V \backslash \{0\}$. Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob daraus immer folgt, dass $\{u, v, w\}$ eine Basis von V ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\langle u, v\rangle = 0 = \langle u, w\rangle$.

(b) $\langle u, v\rangle = 0 = \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$.

(c) $\mathrm{Span}(u, v)^{\perp} = \mathrm{Span}(w)$.

(d) $\forall\, x \in V : |\langle x, u\rangle|^2 + |\langle x, v\rangle|^2 + |\langle x, w\rangle|^2 = \| x \|^2$.

2.7. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Seien K ein Körper mit $|K| \geq n$, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann gibt es ein Funktional $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_i) \neq \varphi(v_j)$ für alle $i \neq j$.

(b) Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Unterraum U. Für einen Unterraum $W \leq V^*$ des Dualraums von V mit $U^\circ \oplus W = V^*$ gilt $U \oplus W^\circ = V$ vermöge der Identifizierung $V^{**} = V$.

(c) Alle Matrizen $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X^2 - X + 2)(X^2 + 2)^4$ und Minimalpolynom $m_A = (X^2 - X + 2)(X^2 + 2)^2$ sind ähnlich zueinander.

(d) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zwei symmetrische Matrizen mit $A = Q^T B Q$ für eine invertierbare Matrix Q, dann stimmen die Eigenverte von A und B überein.

(e) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, dann existiert eine symmetrische Matrix B mit $B^3 = A$.