Lineare Algebra II – 23. Juni 2020

Liebe Studierenden,

diese Woche beschäftigen wir uns mit der Klassifikation von Bilinearformen. Bilineare Abbildungen sind Abbildungen der Form $V \times W \to U$, mit U, W, V Vektorräumen über einem Körper K, derart, dass diese Abbildung jeweils linear in ihren beiden Variablen ist. Bilineare Abbildungen sind beispielsweise wichtig, um Tensorprodukte zu definieren. Wir betrachten in Kapitel 6 nur einen Spezialfall der bilinearen Abbildungen: auch der Körper K ist ein Vektorraum über K. Wir wählen also $U = K$, und betrachten bilineare Abbildungen in den Körper K. Solche bilinearen Abbildungen heißen Bilinearformen.

In Linearer Algebra I haben wir lineare Abbildungen studiert: was sind ihre Eigenschaften, wie lassen sich lineare Abbildungen durch eine Matrix A darstellen. In den letzten Wochen haben wir dann eine Klassifikation der linearen Abbildungen vorgenommen, indem wir nach besonders schönen Repräsentanten der Äquivalenzklassen gesucht haben. Hier hatten wir zwei Antworten, zum einen die Jordan Normalform, die im Falle eines zerfallendes charakteristischen Polynoms einen schönen beziehungsweise brauchbaren Repräsentanten liefert, also zumindest wenn der Körper ausreichend groß ist. Im 5.Kapitel haben wir als Anwendungen zum Dualraum eine allgemeine Klassifikation der linearen Abbildungen mittels der Frobenius Normalform erreicht.

Ganz analog betrachten wir jetzt bilineare Abbildungen. Sie lassen sich wie die linearen Abbildungen mittels einer Matrix, sagen wir A, realisieren. Wie bei linearen Abbildungen müssen wir uns dann überlegen, was bei einem Basiswechsel passiert. Wie bei linearen Abbildungen betrachten wir einen Spezialfall, wählen $V = W$. Bei linearen Abbildungen entspricht der Basiswechsel der Konjugation mit einer invertierbaren Matrix P, genauer, wir erhalten bei Basiswechseln die Matrix $P^{-1}AP$. Bei Bilinearformen erhalten wir bei Basiswechsel Matrizen der Form P^TAP. Die Matrix P muss hier zwar invertierbar sein, aber wir benutzen nicht die Inverse von P. (Bei orthogonalen Matrizen ist per Definition das Inverse gleich dem Transponierten; dies ist aber ein kleiner Spezialfall, und nicht der allgemeine Fall.) Als Anwendung unserer Resultate zu Bilinearformen klassifizieren wir: Zwei Matrizen A und B heißen kongruent, falls es eine invertierbare Matrix P gibt mit $P^TAP = B$. Dies ist eine Äquivalenzrelation (so wie Ähnlichkeit von Matrizen bei linearen Abbildungen). Es stellt sich also wieder die Frage, knnen wir die Äquivalenzklassen dieser bilinearen Abbildungen klassifizieren, in dem wir in jeder Klasse einen schönen Repräsentanten finden? Dieses Problem lösen wir im Fall der sogenannten symmetrischen Bilinearformen.

Und nun noch zu den organisatorischen Dingen. Die nächste Vortragsübung behandelt den Dualraum. Genaue Details entnehmen Sie bitte der Webseite, wo Sie insbesondere vorher auch die Aufgaben finden werden. In einer sowieso schon schwierigen Betreuungssituation aufgrund der zu geringen Kapazitäten in der Assistenz zur Linearen Algebra müssen wir aufgrund des traurigen Ausfalls einer der Tutoren noch etwas näher zusammenrücken. Die Korrektur-Arbeiten wurden entsprechend auf andere Tutoren umverteilt; Herr Kuhn betreut nun die Forenarbeit der betroffenen Gruppe.

Nun zur Umfrage. Die Assistenten erstellen zur Zeit eine Liste mit ausgewählten Aufgaben, inklusive Lösungen, sortiert nach Themen aus der Vorlesung. Sie wird in Ilias im Abschnitt zu den Lösungshinweisen veröffentlicht werden. Diese Liste von Aufgaben soll Ihnen beim Wiederholen bei den Themen helfen, die Sie in der Umfrage als problematisch angesehen haben. Wie lernt man? Versuchen Sie unbedingt zuerst selber die Aufgaben zu lösen. Lernen ist ein Prozess, der eben auch beinhaltet, dass man verstehen muss, an welcher Stelle man gegen die Wand rennt. Lesen Sie erst danach die Lösungen. Das ist dasselbe Phänomen wie mit den Lücken; Sie lesen den Text in beiden Fällen anders. Bei den Lücken im Text hat die Lücke Sie darauf aufmerksam gemacht, dass Sie hier etwas genauer wahrnehmen sollen. Wenn Sie bereits beim selbstständigen Lösen einer Aufgabe gemerkt haben, wo Sie hängen bleiben, werden Sie beim Lesen der Lösung viel genauer mitbekommen, was der Lösungstext gerade an dieser Stelle sagt.

Mit freundlichen Grüßen,
Anne Henke