ONLINE-TEST 2

Aufgabe 1

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}\,.$$

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{}\,.$$

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}\,.$$

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}\,.$$

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}\,.$$

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}\,.$$

Bestimmen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} -2-x & 1 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = x^2 + \boxed{}\, x + \boxed{}\,.$$

——— Aufgabe 3 ———

Sei $A = (a_1|a_2|a_3|a_4) \in M_4(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = 4$. Bestimmen Sie folgende Determinante.

$\det(2a_2|a_1 + a_2|a_4|a_3) = \boxed{}\,.$

Sei $A = (a_1|a_2|a_3|a_4) \in M_4(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = 3$. Bestimmen Sie folgende Determinante.

$\det(a_1 + a_4|a_2 + a_3|3a_4|a_3) = \boxed{}\,.$

Sei $A = (a_1|a_2|a_3|a_4) \in M_4(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = -3$. Bestimmen Sie folgende Determinante.

$\det(a_2 + a_3|2a_1|a_3 + a_4| - a_4) = \boxed{}\,.$

Sei $A = (a_1|a_2|a_3|a_4) \in M_4(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = -2$. Bestimmen Sie folgende Determinante.

$\det(2a_1|a_3 + a_4|a_2|2a_4) = \boxed{}\,.$

——— Aufgabe 4 ———

Sei K ein Körper. Sind folgende Aussagen über die Abbildung $\det : M_2(K) \to K : A \mapsto \det(A)$ wahr oder falsch?

a) Die Abbildung det ist injektiv.

b) Die Abbildung det ist ein Vektorraumhomomorphismus.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐

Sei K ein Körper. Sind folgende Aussagen über die Abbildung $\det : M_3(K) \to K : A \mapsto \det(A)$ wahr oder falsch?

a) Die Abbildung det ist injektiv.

b) Die Abbildung det ist ein Vektorraumhomomorphismus.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	▯	▯
b)	▯	▯

Sei K ein Körper. Sind folgende Aussagen über die Abbildung $\det : M_2(K) \to K : A \mapsto \det(A)$ wahr oder falsch?

a) Die Abbildung det ist surjektiv.

b) Die Abbildung det ist ein Vektorraumhomomorphismus.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	▯	▯
b)	▯	▯

Sei K ein Körper. Sind folgende Aussagen über die Abbildung $\det : M_3(K) \to K : A \mapsto \det(A)$ wahr oder falsch?

a) Die Abbildung det ist surjektiv.

b) Die Abbildung det ist ein Vektorraumhomomorphismus.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	▯	▯
b)	▯	▯

Aufgabe 5

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins 1_R und $A \in M_n(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in R. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

a) Ist A invertierbar, so ist $\det(A) \in R^\times$ eine Einheit.

b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $A \neq I_n$ folgt $\det(A) \neq 1_R$.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	▯	▯
b)	▯	▯

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins 1_R und $A \in M_n(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in R. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

a) Ist A invertierbar, so ist $\det(A) \in R^\times$ eine Einheit.

b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $\det(A) = 1_R$ folgt $A = I_n$.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	▯	▯
b)	▯	▯

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins 1_R und $A \in M_n(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in R. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

a) Ist $\det(A) \notin R^\times$ keine Einheit, so ist A nicht invertierbar.

b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $A \neq I_n$ folgt $\det(A) \neq 1_R$.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	▯	▯
b)	▯	▯

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins 1_R und $A \in M_n(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in R. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

a) Ist $\det(A) \notin R^\times$ keine Einheit, so ist A nicht invertierbar.

b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $\det(A) = 1_R$ folgt $A = I_n$.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	▯	▯
b)	▯	▯

Aufgabe 6

Betrachten Sie die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (2x + 3y, 4x + 6y)$ und $g(x, y) = (5x + 8y, x + 2y)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt Basen B_1, B_2, B_1', B_2' von $\mathbb{R}^2$, sodass ${}_{B_1}[f]_{B_2} = {}_{B_1'}[g]_{B_2'}$, wobei ${}_{B_1}[f]_{B_2}$ und ${}_{B_1'}[g]_{B_2'}$ die darstellenden Matrizen von f und g bezüglich der Basen B_1 und B_2 bzw. B_1' und B_2' sind. ◯ wahr ◯ falsch

---

Betrachten Sie die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (-2x + 3y, 4x - 6y)$ und $g(x, y) = (6x + 8y, 2x + y)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt Basen B_1, B_2, B_1', B_2' von $\mathbb{R}^2$, sodass ${}_{B_1}[f]_{B_2} = {}_{B_1'}[g]_{B_2'}$, wobei ${}_{B_1}[f]_{B_2}$ und ${}_{B_1'}[g]_{B_2'}$ die darstellenden Matrizen von f und g bezüglich der Basen B_1 und B_2 bzw. B_1' und B_2' sind. ◯ wahr ◯ falsch

---

Betrachten Sie die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (2x - 3y, -4x + 6y)$ und $g(x, y) = (4x + 8y, x - 2y)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt Basen B_1, B_2, B_1', B_2' von $\mathbb{R}^2$, sodass ${}_{B_1}[f]_{B_2} = {}_{B_1'}[g]_{B_2'}$, wobei ${}_{B_1}[f]_{B_2}$ und ${}_{B_1'}[g]_{B_2'}$ die darstellenden Matrizen von f und g bezüglich der Basen B_1 und B_2 bzw. B_1' und B_2' sind. ◯ wahr ◯ falsch

---

Betrachten Sie die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (-2x - 3y, 4x + 6y)$ und $g(x, y) = (3x + 8y, 2x + 2y)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt Basen B_1, B_2, B_1', B_2' von $\mathbb{R}^2$, sodass ${}_{B_1}[f]_{B_2} = {}_{B_1'}[g]_{B_2'}$, wobei ${}_{B_1}[f]_{B_2}$ und ${}_{B_1'}[g]_{B_2'}$ die darstellenden Matrizen von f und g bezüglich der Basen B_1 und B_2 bzw. B_1' und B_2' sind. ◯ wahr ◯ falsch

Aufgabe 7

Sei $n \geq 2$. Wir betrachten die lineare Abbildung $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto A^T$.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Die Abbildung L hat genau zwei unterschiedliche Eigenwerte.

b) Es gibt eine Basis von $M_n(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von L.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐

Sei $n \geq 2$. Wir betrachten die lineare Abbildung $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto A^T$.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Die Abbildung L hat genau zwei unterschiedliche Eigenwerte.

b) Es gibt eine Basis von $M_n(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von L.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐

Sei $n \geq 2$. Wir betrachten die lineare Abbildung $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto A^T$.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Die Abbildung L hat genau zwei unterschiedliche Eigenwerte.

b) Es gibt eine Basis von $M_n(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von L.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐

Sei $n \geq 2$. Wir betrachten die lineare Abbildung $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto A^T$.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Die Abbildung L hat genau zwei unterschiedliche Eigenwerte.

b) Es gibt eine Basis von $M_n(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von L.

Antwort:

	wahr	falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐

Aufgabe 8

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $M^2 - 3M + E_n$.

☐ Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $M^2 - 3M + E_n$.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $\lambda^2 - 3\lambda + 1$ ein Eigenwert von $M^2 - 3M + E_n$.

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $2M^2 - M + E_n$.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $2M^2 - M + E_n$.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $2\lambda^2 - \lambda + 1$ ein Eigenwert von $2M^2 - M + E_n$.

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $-M^2 + 3M + E_n$.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $-M^2 + 3M + E_n$.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $-\lambda^2 + 3\lambda + 1$ ein Eigenwert von $-M^2 + 3M + E_n$.

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $E_n \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenvektoren v von M ist v ein Eigenvektor von $2M^2 + 3M + E_n$.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist λ ein Eigenwert von $2M^2 + 3M + E_n$.

☐Für alle $M \in \mathsf{Mat}(n \times n, K)$ und für alle Eigenwerte λ von M ist $2\lambda^2 + 3\lambda + 1$ ein Eigenwert von $2M^2 + 3M + E_n$.

Aufgabe 9

Sei $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ das Charakteristische Polynom der folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie a_2, a_1 und a_0.

$a_2=$ ☐ $a_1=$ ☐ $a_0=$ ☐

Sei $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ das Charakteristische Polynom der folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie a_2, a_1 und a_0.

$a_2 = \boxed{}$ $a_1 = \boxed{}$ $a_0 = \boxed{}$

Sei $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ das Charakteristische Polynom der folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie a_2, a_1 und a_0.

$a_2 = \boxed{}$ $a_1 = \boxed{}$ $a_0 = \boxed{}$

Sei $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ das Charakteristische Polynom der folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie a_2, a_1 und a_0.

$a_2 = \boxed{}$ $a_1 = \boxed{}$ $a_0 = \boxed{}$

Aufgabe 10

Sei A die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ von A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $\lambda_3 = \boxed{}$

Sei A die Matrix gegeben durch
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ von A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $\lambda_3 = \boxed{}$

Sei A die Matrix gegeben durch
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ von A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $\lambda_3 = \boxed{}$

Sei A die Matrix gegeben durch
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ von A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $\lambda_3 = \boxed{}$