ONLINE-TEST 3

—————— **Aufgabe 1** ——————

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch
- Alle $\mathbb{Q}$-Endomorphismen von $\mathbb{Q}^2$ haben einen Eigenvektor. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch
- Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass f keinen Eigenvektor hat. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{R}$-Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ haben einen Eigenvektor. ◯ wahr ◯falsch
- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Alle $\mathbb{C}$-Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes haben einen Eigenwert in $\mathbb{C}$. ◯ wahr ◯falsch
- Alle $\mathbb{Q}$-Endomorphismen eines $\mathbb{Q}$-Vektorraumes der Dimension 2 haben einen Eigenvektor. ◯ wahr ◯falsch

—————— **Aufgabe 2** ——————

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & 2 & 2k + k^2 & -3 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2 - 4 \\ 0 & -1 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & -1 & 2k+k^2 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2-4 \\ 0 & 3 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & 2 & 2k+k^2 & -1 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2-4 \\ 0 & 3 & k & -5 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} k & 5 & 2k+k^2 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2-4 \\ 0 & -1 & k & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn $k = \boxed{}$ ist.

Aufgabe 3

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^5 = M$. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^6 = M$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^7 = M$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $M \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Matrix $P \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass $P^4 = M$. ◯ wahr ◯falsch

—— **Aufgabe 4** ——

Sei $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2 \times 2)$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $a \neq 1$ und $b \neq 1$, sodass $a^{11} = b^5 = 1$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $M^{16} = I_2$, wobei I_2 die Einheitsmatrix ist.

☐ $M^{43} \neq M$.

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2 \times 2)$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $a \neq 1$ und $b \neq 1$, sodass $a^{13} = b^7 = 1$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $M^{20} = I_2$, wobei I_2 die Einheitsmatrix ist.

☐$M^{53} = M$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2\times 2)$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $a \neq 1$ und $b \neq 1$, sodass $a^3 = b^{19} = 1$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$M^{22} = I_2$, wobei I_2 die Einheitsmatrix ist.

☐$M^{48} \neq M$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2\times 2)$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $a \neq 1$ und $b \neq 1$, sodass $a^{13} = b^5 = 1$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$M^{18} = I_2$, wobei I_2 die Einheitsmatrix ist.

☐$M^{59} = M$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 5

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(5 \times 5, \mathbb{R})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Span}\{A^i : i \geq 0\}) = 15$.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{Q}$, sodass $A^2 = \lambda A$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(6 \times 6, \mathbb{C})$, sodass $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Span}\{A^i : i \geq 0\}) = 15$.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\mu \in \mathbb{R}$, sodass $\mu A = A^2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(7 \times 7, \mathbb{Q})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Span}\{A^i : i \geq 0\}) = 13$.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda A = A^2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(9 \times 9, \mathbb{Q})$, sodass $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Span}\{A^i : i \geq 0\}) = 19$.

☐Sei $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Wenn $\det(A)$ null ist, dann gibt es $\mu \in \mathbb{C}$, sodass $\mu A = A^2$.

Aufgabe 6

Für eine Matrix A bezeichne χ_A das charakteristische Polynom von A und m_A das Minimalpolynom. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

Für eine Matrix A bezeichne χ_A das charakteristische Polynom von A und m_A das Minimalpolynom. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

Für eine Matrix A bezeichne χ_A das charakteristische Polynom von A und m_A das Minimalpolynom. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.

Für eine Matrix A bezeichne χ_A das charakteristische Polynom von A und m_A das Minimalpolynom. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ist m_A ein Teiler von χ_A.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist χ_A ein Teiler von m_A^2.

☐Für alle $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist χ_A ein Teiler von m_A.

Aufgabe 7

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und bezeichne m_A das Minimalpolynom von A. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$m_A(3) = \boxed{}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und bezeichne m_A das Minimalpolynom von A. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$m_A(3) = \boxed{}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und bezeichne m_A das Minimalpolynom von A. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$m_A(2) = \boxed{}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und bezeichne m_A das Minimalpolynom von A. Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$m_A(2) = \boxed{}$.

Aufgabe 8

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $A \in M_n(K)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Alle Vektoren $0 \neq v \in V$ sind genau dann Eigenvektoren von A, wenn es $\lambda \in K$ gibt, sodass die Matrizen A und λI_n ähnlich sind.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $A \in M_n(K)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Alle Vektoren $0 \neq v \in V$ sind genau dann Eigenvektoren von A, wenn es $\lambda \in K$ gibt, sodass die Matrizen A und λI_n ähnlich sind.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $A \in M_n(K)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Alle Vektoren $0 \neq v \in V$ sind genau dann Eigenvektoren von A, wenn es $\lambda \in K$ gibt, sodass die Matrizen A und λI_n ähnlich sind.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $A \in M_n(K)$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Alle Vektoren $0 \neq v \in V$ sind genau dann Eigenvektoren von A, wenn es $\lambda \in K$ gibt, sodass die Matrizen A und λI_n ähnlich sind.

☐wahr ☐falsch

—— Aufgabe 9 ——

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von M stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

☐M ist diagonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ M ist diagonalisierbar.

☐ Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von M stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von M stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

☐ M ist diagonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ M ist diagonalisierbar.

☐ Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von M stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

Aufgabe 10

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, die keine Eigenwerte hat.

☐ wahr ☐ falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, die keine Eigenwerte hat.

□wahr □falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, die keine Eigenwerte hat.

□wahr □falsch

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, die keine Eigenwerte hat.

□wahr □falsch