ONLINE-TEST 5

——— Aufgabe 1 ———

Sei U der $\mathbb{R}$-Vektorraum $[\{(1,0,1)\}]$. Betrachten Sie den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^3/U$ sowie die Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\pi(6,3,4) = \pi(3,3,1)$.

☐ Für alle $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ gilt $\pi(0,a,b) = \pi(0,a',b')$ genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

☐ Wenn $b \neq b'$, dann gilt $\pi(a,b,c) \neq \pi(a',b',c')$ für alle $a, a', c, c' \in \mathbb{R}$.

Sei U der $\mathbb{R}$-Vektorraum $[\{(1,0,1)\}]$. Betrachten Sie den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^3/U$ sowie die Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\pi(7,2,5) = \pi(3,2,1)$.

☐ Für alle $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ gilt $\pi(0,a,b) = \pi(0,a',b')$ genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

☐ Wenn $b \neq b'$, dann gilt $\pi(a,b,c) \neq \pi(a',b',c')$ für alle $a, a', c, c' \in \mathbb{R}$.

Sei U der $\mathbb{R}$-Vektorraum $[\{(1,0,1)\}]$. Betrachten Sie den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^3/U$ sowie die Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\pi(-2,-2,4) = \pi(2,-2,8)$.

☐ Für alle $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ gilt $\pi(0,a,b) = \pi(0,a',b')$ genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

☐ Wenn $b \neq b'$, dann gilt $\pi(a,b,c) \neq \pi(a',b',c')$ für alle $a, a', c, c' \in \mathbb{R}$.

Sei U der $\mathbb{R}$-Vektorraum $[\{(1,0,1)\}]$. Betrachten Sie den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^3/U$ sowie die Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\pi(3,-3,5) = \pi(0,-3,2)$.

☐ Für alle $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ gilt $\pi(0,a,b) = \pi(0,a',b')$ genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

☐ Wenn $b \neq b'$, dann gilt $\pi(a,b,c) \neq \pi(a',b',c')$ für alle $a, a', c, c' \in \mathbb{R}$.

——— Aufgabe 2 ———

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $U = [\{(1,1,1)\}]$ sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x - 2y - z$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3/U \to \mathbb{R}$, sodass $f = g \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$ die Restklassenabbildung ist. ◯ wahr ◯ falsch

---

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $U = [\{(1,2,1)\}]$ sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x + y + z$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3/U \to \mathbb{R}$, sodass $f = g \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$ die Restklassenabbildung ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $U = [\{(1,-1,1)\}]$ sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x - 2y + z$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3/U \to \mathbb{R}$, sodass $f = g \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$ die Restklassenabbildung ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $U = [\{(2,1,1)\}]$ sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x - 2y + z$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3/U \to \mathbb{R}$, sodass $f = g \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$ die Restklassenabbildung ist. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 3

Beachten Sie, dass die Elemente des Hauptraums manchmal auch Hauptvektoren genannt werden. Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $(3,1,-2,0)$ ist ein Hauptvektor von A.

☐ $(1,0,2,-1)$ ist ein Hauptvektor von A.

☐ $(1,1,2,-1)$ ist ein Hauptvektor von A.

Beachten Sie, dass die Elemente des Hauptraums manchmal auch Hauptvektoren genannt werden. Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$(5,2,-2,0)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(1,1,-2,2)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(1,0,2,-1)$ ist ein Hauptvektor von A.

Beachten Sie, dass die Elemente des Hauptraums manchmal auch Hauptvektoren genannt werden. Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$(5,1,-2,1)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(-1,1,-2,3)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(2,0,1,-2)$ ist ein Hauptvektor von A.

Beachten Sie, dass die Elemente des Hauptraums manchmal auch Hauptvektoren genannt werden. Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$(3,1,-2,1)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(1,1,-2,2)$ ist ein Hauptvektor von A.

□$(2,1,1,-2)$ ist ein Hauptvektor von A.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2+k-2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann nilpotent, wenn $k = \boxed{}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2+3k+2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & k+2 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann nilpotent, wenn $k = \boxed{}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2-k-2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann nilpotent, wenn $k = \boxed{}$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2-3k+2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann nilpotent, wenn $k = \boxed{}$.

Aufgabe 5

Seien $A, B \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Wenn A und B nilpotente Matrizen sind, dann ist $A + B$ auch nilpotent.

☐ Wenn A und B nilpotente Matrizen sind, dann ist AB auch nilpotent.

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Seien $A, B \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Es gibt A und B nilpotente Matrizen, sodass AB nicht nilpotent ist.

☐ Wenn A und B nilpotente Matrizen sind, dann ist $A + B$ auch nilpotent.

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Seien $A, B \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt A und B nilpotente Matrizen, sodass $A + B$ nicht nilpotent ist.

☐Es gibt A und B nilpotente Matrizen, sodass AB nicht nilpotent ist.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Seien $A, B \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt A und B nilpotente Matrizen, sodass $A + B$ nicht nilpotent ist.

☐Wenn A und B nilpotente Matrizen sind, dann ist AB auch nilpotent.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 6

Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch $T(a, b, c) = (c, 0, b)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung T ist nilpotent. ○ wahr ○ falsch

Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch $T(a, b, c) = (0, c, b)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung T ist nilpotent. ○ wahr ○ falsch

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 4 und sei $D : V \to V$ die lineare Abbildung gegeben durch $D(f) = df/dx$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung D ist nilpotent. ○ wahr ○ falsch

Sei $T : \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \to \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Abbildung gegeben durch $T(A) = A^T$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung T ist nilpotent. ○ wahr ○falsch

Aufgabe 7

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $f, g : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ die $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, x_1, x_2, x_5, 0)$,

$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_4, 0, 0, x_3)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{K}^5$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $f, g : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ die $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_5, 0, 0, x_3, x_2)$,

$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, x_1, x_2, x_5, 0)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{K}^5$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $f, g : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ die $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_5, 0, 0, x_3, x_2)$,

$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_4, 0, 0, x_3)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{K}^5$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $f, g : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ die $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen gegeben durch

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, x_2, x_3, x_1)$,

$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_5, 0, 0, x_3, x_2)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{K}^5$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 8

Wenn $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir mit $(d_j)_{j=1}^k$ die Folge $(d_1, \ldots, d_k)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(15 \times 15, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{15})^j))_{j=1}^6 = (4, 7, 10, 11, 12, 12)$.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(15 \times 15, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{15})^j))_{j=1}^6 = (4, 7, 8, 11, 12, 12)$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wenn $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir mit $(d_j)_{j=1}^k$ die Folge $(d_1, \ldots, d_k)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(20 \times 20, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{20})^j))_{j=1}^6 = (5, 9, 13, 15, 16, 16)$.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(20 \times 20, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{20})^j))_{j=1}^6 = (5, 9, 11, 15, 16, 16)$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wenn $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir mit $(d_j)_{j=1}^k$ die Folge $(d_1, \ldots, d_k)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(14 \times 14, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{14})^j))_{j=1}^6 = (4, 7, 9, 10, 11, 11)$.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(14 \times 14, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{14})^j))_{j=1}^6 = (4, 7, 8, 10, 11, 11)$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wenn $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir mit $(d_i)_{j=1}^k$ die Folge $(d_1, \ldots, d_k)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(16 \times 16, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{16})^j))_{j=1}^6 = (5, 8, 10, 11, 12, 12)$.

☐Es gibt $A \in \mathsf{Mat}(16 \times 16, \mathbb{C})$, sodass $(\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Kern}((A - 2E_{16})^j))_{j=1}^6 = (5, 8, 9, 11, 12, 12)$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 9

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Wenn $\chi_A = x^4(x-1)^3(x-2)^2$ und $m_A = x^3(x-1)^2(x-2)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn $\chi_A = x^6(x-1)^2$ und $m_A = x^2(x-1)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf

Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn ImA = Ker$A$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Wenn $\chi_A = x^4(x-1)^3(x-2)^2$ und $m_A = x^3(x-1)^2(x-2)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn $\chi_A = x^6(x-1)^2$ und $m_A = x^2(x-1)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn ImA = Ker$A$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Wenn $\chi_A = x^4(x-1)^3(x-2)^2$ und $m_A = x^3(x-1)^2(x-2)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn $\chi_A = x^6(x-1)^2$ und $m_A = x^2(x-1)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn ImA = Ker$A$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Wenn $\chi_A = x^4(x-1)^3(x-2)^2$ und $m_A = x^3(x-1)^2(x-2)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn $\chi_A = x^6(x-1)^2$ und $m_A = x^2(x-1)$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

☐Wenn ImA = Ker$A$, dann kann man die Jordansche Normalform von A bis auf Permutation von Blöcken eindeutig bestimmen.

Aufgabe 10

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

A und A^T sind immer ähnlich.

☐wahr ☐falsch

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

A und A^T sind immer ähnlich.

☐wahr ☐falsch

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

A und A^T sind immer ähnlich.

☐wahr ☐falsch

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

A und A^T sind immer ähnlich.

☐wahr ☐falsch