ONLINE-TEST 7

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{15})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \mathrm{Kern}(\varphi)) = 6$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{17})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \mathrm{Kern}(\varphi)) = 4$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{13})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \mathrm{Kern}(\varphi)) = 4$. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt einen Unterraum U von $(\mathbb{K}^{19})^*$, sodass $\dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(\bigcap_{\varphi \in U} \mathrm{Kern}(\varphi)) = 2$. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 2

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$. Wie früher bezeichnen wir $\mathrm{Span}(v)$ mit $[v]$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $(\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ \subseteq [\{\varphi\}]$

☐ $(\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ \supseteq [\{\varphi\}]$

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$. Wie früher bezeichnen wir $\mathrm{Span}(v)$ mit $[v]$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $\varphi \in (\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ$

☐ Wenn $\psi \in (\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ \setminus \{0\}$, dann gibt es $\lambda \in K$, sodass $\psi = \lambda\varphi$.

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$. Wie früher bezeichnen wir Span(v) mit $[v]$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$\varphi \in (\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ$

☐$(\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ \subseteq [\{\varphi\}]$

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$. Wie früher bezeichnen wir Span(v) mit $[v]$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Es gibt $\psi \in (\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ \setminus \{0\}$, sodass $\psi \neq \lambda\varphi$ für alle $\lambda \in K$.

☐$(\mathrm{Kern}(\varphi))^\circ \supseteq [\{\varphi\}]$

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

Seien $U \subseteq V$ und $W \subseteq V^*$ Unterräume. Wir bezeichnen mit U° den Vektorraum $\{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ und definieren $W^\perp = \{v \in V : \varphi(v) = 0 \text{ für alle } \varphi \in W\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$(U^\circ)^\circ \subseteq V$.

☐$W^\perp = W^\circ$.

☐$\dim W^\perp = \dim W^\circ$.

☐Es gibt ein Isomorphisums $\Phi : V \to V^{**}$, sodass $\Phi(W^\perp) = W^\circ$.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

Seien $U \subseteq V$ und $W \subseteq V^*$ Unterräume. Wir bezeichnen mit U° den Vektorraum $\{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ und definieren $W^\perp = \{v \in V : \varphi(v) = 0 \text{ für alle } \varphi \in W\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$(U^\circ)^\circ \subseteq V^{**}$.

☐Es gibt ein Isomorphisums $\Phi : V^{**} \to V$, sodass $\Phi(W^\circ) = W^\perp$.

☐$\dim W^{\perp} = \dim W^{\circ}$.

☐$W^{\perp} = W^{\circ}$.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

Seien $U \subseteq V$ und $W \subseteq V^*$ Unterräume. Wir bezeichnen mit U° den Vektorraum $\{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ und definieren $W^{\perp} = \{v \in V : \varphi(v) = 0 \text{ für alle } \varphi \in W\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$W^{\perp} = W^{\circ}$.

☐Es gibt kein Isomorphisums $\Phi : V^{**} \to V$, sodass $\Phi(W^{\circ}) = W^{\perp}$.

☐$\dim W^{\perp} = \dim W^{\circ}$.

☐$(U^{\circ})^{\circ} \subseteq V^{**}$.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

Seien $U \subseteq V$ und $W \subseteq V^*$ Unterräume. Wir bezeichnen mit U° den Vektorraum $\{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ und definieren $W^{\perp} = \{v \in V : \varphi(v) = 0 \text{ für alle } \varphi \in W\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$W^{\perp} \neq W^{\circ}$.

☐$(U^{\circ})^{\circ} \subseteq V$.

☐Es gibt kein Isomorphisums $\Phi : V \to V^{**}$, sodass $\Phi(W^{\perp}) = W^{\circ}$.

☐$\dim W^{\perp} = \dim W^{\circ}$.

Aufgabe 4

Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $k \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi \in V^*$ gegeben durch $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - kx_2 + 4x_3 - 11x_4$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$\varphi \in [\{(3, -1, 4, 2)\}]^{\circ}$ genau dann, wenn $k=$☐

Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $k \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi \in V^*$ gegeben durch $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - kx_2 + 3x_3 - 13x_4$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$\varphi \in [\{(3,-1,4,2)\}]^\circ$ genau dann, wenn k=$\boxed{}$

Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $k \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi \in V^*$ gegeben durch $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + kx_2 + 2x_3 - 8x_4$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$\varphi \in [\{(3,-1,4,2)\}]^\circ$ genau dann, wenn k=$\boxed{}$

Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $k \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi \in V^*$ gegeben durch $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 - kx_2 - 11x_3 + 3x_4$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

$\varphi \in [\{(3,-1,4,2)\}]^\circ$ genau dann, wenn k=$\boxed{}$

Aufgabe 5

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(1,0,1,0),(2,2,-1,0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $U \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}] = 0$.

☐ $U \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}] = 0$.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(3,2,0,0),(-1,-2,2,0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $U \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}] = 0$.

☐ $U \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}] = 0$.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(1,2,-2,0),(1,0,1,0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$U \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}] = 0$.

☐$U \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}] = 0$.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $\{(3,2,0,0),(2,2,-1,0)\}$ aufgespannte Unterraum. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 + x_3,$

$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3 + x_4.$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$U \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_3\}] = 0$.

☐$U \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}]^\perp = 0$, $U^\circ \cap [\{\varphi_1, \varphi_2\}] = 0$.

Aufgabe 6

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen mit $[A]$ die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation (A und B heißen zueinander ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt, sodass $A = CBC^{-1}$).

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(6 \times 6, \mathbb{R})$. Die Menge $\{[A] : A \text{ ist nilpotent und } \dim_{\mathbb{R}}(\mathsf{Kern}(A)) = 2\}$ hat ☐ Elemente.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen mit $[A]$ die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation (A und B heißen zueinander ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt, sodass $A = CBC^{-1}$).

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(6 \times 6, \mathbb{R})$. Die Menge $\{[A] : A \text{ ist nilpotent und } \dim_{\mathbb{R}}(\mathsf{Kern}(A)) = 3\}$ hat

$\square$ Elemente.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen mit $[A]$ die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation (A und B heißen zueinander ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt, sodass $A = CBC^{-1}$).

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(6 \times 6, \mathbb{R})$. Die Menge $\{[A] : A \text{ ist nilpotent und} \dim_{\mathbb{R}}(\mathsf{Kern}(A)) = 4\}$ hat $\square$ Elemente.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen mit $[A]$ die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation (A und B heißen zueinander ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt, sodass $A = CBC^{-1}$).

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(6 \times 6, \mathbb{R})$. Die Menge $\{[A] : A \text{ ist nilpotent und} \dim_{\mathbb{R}}(\mathsf{Kern}(A)) = 5\}$ hat $\square$ Elemente.

Aufgabe 7

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Mit $[A]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Menge $\{[A] : \chi_A = X^2 + 2X + 1\}$ hat $\square$ Elemente.

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Mit $[A]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Menge $\{[A] : \chi_A = X^2 - 2X + 1\}$ hat $\square$ Elemente.

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Mit $[A]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Menge $\{[A] : \chi_A = X^2 + 4X + 4\}$ hat $\square$ Elemente.

Betrachten Sie Matrizen $A \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Mit $[A]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von A bezüglich der Ähnlichkeitsrelation.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Menge $\{[A] : \chi_A = X^2 - 4X + 4\}$ hat $\boxed{}$ Elemente.

Aufgabe 8

Sei X die Menge $\{M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{F}_3) : M$ ist in Frobenius Normalform, χ_M ist irreduzibel und $\mathsf{Sp}(M) = [1]\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

X hat $\boxed{}$ Elemente.

Sei X die Menge $\{M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{F}_3) : M$ ist in Frobenius Normalform, χ_M ist irreduzibel und $\mathsf{Sp}(M) = [-1]\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

X hat $\boxed{}$ Elemente.

Sei X die Menge $\{M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{F}_3) : M$ ist in Frobenius Normalform, χ_M ist irreduzibel und $\mathsf{det}(M) = [-1]\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

X hat $\boxed{}$ Elemente.

Sei X die Menge $\{M \in \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{F}_3) : M$ ist in Frobenius Normalform, χ_M ist irreduzibel und $\mathsf{det}(M) = [1]\}$.

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

X hat $\boxed{}$ Elemente.

Aufgabe 9

Sei K ein unendlicher Körper (d.h. K besitzt unendlich viele Elemente). Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U_i \leq V$ Unterräume für $1 \leq i \leq m$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Gleichung $V = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ ergibt $U_j = V$ für mindestens ein $1 \leq j \leq m$.

☐ wahr ☐ falsch

Sei K ein unendlicher Körper (d.h. K besitzt unendlich viele Elemente). Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U_i \leq V$ Unterräume für $1 \leq i \leq m$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Gleichung $V = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ ergibt $U_j = V$ für mindestens ein $1 \leq j \leq m$.

☐wahr ☐falsch

Sei K ein unendlicher Körper (d.h. K besitzt unendlich viele Elemente). Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U_i \leq V$ Unterräume für $1 \leq i \leq m$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Gleichung $V = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ ergibt $U_j = V$ für mindestens ein $1 \leq j \leq m$.

☐wahr ☐falsch

Sei K ein unendlicher Körper (d.h. K besitzt unendlich viele Elemente). Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U_i \leq V$ Unterräume für $1 \leq i \leq m$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Gleichung $V = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ ergibt $U_j = V$ für mindestens ein $1 \leq j \leq m$.

☐wahr ☐falsch

Aufgabe 10

Seien K ein unendlicher Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Für alle $x_1, \ldots, x_l \in V \backslash \{0\}$ gibt es ein $f \in V^*$ derart, dass $f(x_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq l$.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein unendlicher Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Für alle $x_1, \ldots, x_l \in V \backslash \{0\}$ gibt es ein $f \in V^*$ derart, dass $f(x_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq l$.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein unendlicher Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Für alle $x_1, \ldots, x_l \in V\backslash\{0\}$ gibt es ein $f \in V^*$ derart, dass $f(x_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq l$.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein unendlicher Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Für alle $x_1, \ldots, x_l \in V\backslash\{0\}$ gibt es ein $f \in V^*$ derart, dass $f(x_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq l$.

☐wahr ☐falsch