ONLINE-TEST 8

——— Aufgabe 1 ———

Seien K ein Körper und V_1, V_2, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : V_1 \times V_2 \to W$ heißt bilinear über K, falls die Abbildungen $f(v_1, -)$ und $f(-, v_2)$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ linear sind.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Multiplikationsabbildung $K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto xy$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $K^m \times K^n \to K^p$, $(x, y) \mapsto (x^T A_1 y, \ldots, x^T A_p y)^T$ mit $A_i \in M_{m\times n}(K)$ für $1 \leq i \leq p$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $M_n(K) \times M_n(K) \to K$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(A + B)$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$ ist bilinear.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Seien K ein Körper und V_1, V_2, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : V_1 \times V_2 \to W$ heißt bilinear über K, falls die Abbildungen $f(v_1, -)$ und $f(-, v_2)$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ linear sind.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Multiplikationsabbildung $K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto xy$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $K^m \times K^n \to K^p$, $(x, y) \mapsto (x^T A_1 y, \ldots, x^T A_p y)^T$ mit $A_i \in M_{m\times n}(K)$ für $1 \leq i \leq p$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $M_n(K) \times M_n(K) \to K$, $(A, B) \mapsto \det(AB)$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x_2y_3 - x_1y_3, x_3y_1 - x_3y_2, x_1y_2 - 2x_2y_1)$ ist bilinear.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Seien K ein Körper und V_1, V_2, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : V_1 \times V_2 \to W$ heißt bilinear über K, falls die Abbildungen $f(v_1, -)$ und $f(-, v_2)$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ linear sind.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Multiplikationsabbildung $K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto xy$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $K^m \times K^n \to K^p$, $(x, y) \mapsto (x^T A_1 y, \ldots, x^T A_p y)^T$ mit $A_i \in M_{m\times n}(K)$ für $1 \leq i \leq p$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $M_n(K) \times M_n(K) \to K$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(A + B)$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x_2y_3 - 3x_2y_1, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_3y_2)$ ist bilinear.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Seien K ein Körper und V_1, V_2, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : V_1 \times V_2 \to W$ heißt bilinear über K, falls die Abbildungen $f(v_1, -)$ und $f(-, v_2)$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ linear sind.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Multiplikationsabbildung $K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto xy$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $K^m \times K^n \to K^p$, $(x, y) \mapsto (x^T A_1 y, \ldots, x^T A_p y)^T$ mit $A_i \in M_{m\times n}(K)$ für $1 \leq i \leq p$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $M_n(K) \times M_n(K) \to K$, $(A, B) \mapsto \det(AB)$ ist bilinear.

☐Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x_2y_3 - 3x_3y_2, x_1y_2 - x_1y_3, x_3y_1 - x_2y_1)$ ist bilinear.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 2

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := (2x_2y_3 - 2x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist symmetrisch.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist schief-symmetrisch.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := (x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist symmetrisch.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist schief-symmetrisch.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := (x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + 3x_1y_2 - 3x_2y_1)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist symmetrisch.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist schief-symmetrisch.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := (3x_2y_3 - 3x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1)$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist symmetrisch.

☐Die Bilinearform $f(x, y)$ ist schief-symmetrisch.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 3

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Abbildung $g(x, y) := 1/2(f(x, y) + f(y, x))$ ist eine symmetrische Bilinearform.

☐Die Abbildung $g(x, y) := 1/2(f(x, y) + f(y, x))$ ist eine schief-symmetrische Bilinearform.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Abbildung $g(x, y) := 1/2(f(x, y) - f(y, x))$ ist eine symmetrische Bilinearform.

☐Die Abbildung $g(x, y) := 1/2(f(x, y) - f(y, x))$ ist eine schief-symmetrische Bilinearform.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Abbildung $g(x, y) := f(x + y, x + y)$ ist eine symmetrische Bilinearform.

☐Die Abbildung $g(x, y) := f(x + y, x + y)$ ist eine schief-symmetrische Bilinearform.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei f eine Bilinearform $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐Die Abbildung $g(x,y) := f(x-y, x-y)$ ist eine symmetrische Bilinearform.

☐Die Abbildung $g(x,y) := f(x-y, x-y)$ ist eine schief-symmetrische Bilinearform.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

——— Aufgabe 4 ———

Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $\sigma(f,g) = \Sigma_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)g^{(m)}(0)$ die Bilinearform aus Beispiel 6.6.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform $\sigma(f,g)$ ist ausgeartet.

☐wahr ☐falsch

Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $\sigma(f,g) = \Sigma_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)g^{(m)}(0)$ die Bilinearform aus Beispiel 6.6.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform $\sigma(f,g)$ ist ausgeartet.

☐wahr ☐falsch

Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $\sigma(f,g) = \Sigma_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)g^{(m)}(0)$ die Bilinearform aus Beispiel 6.6.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform $\sigma(f,g)$ ist ausgeartet.

☐wahr ☐falsch

Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $\sigma(f,g) = \Sigma_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)g^{(m)}(0)$ die Bilinearform aus Beispiel 6.6.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform $\sigma(f,g)$ ist ausgeartet.

☐wahr ☐falsch

——— Aufgabe 5 ———

Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Bilinearform $f \neq 0$ auf V mit $f(x,y) = \epsilon f(y,x)$ und $\epsilon \notin \{1,-1\}$.

☐wahr ☐falsch

Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Bilinearform $f \neq 0$ auf V mit $f(x,y) = \epsilon f(y,x)$ und $\epsilon \notin \{1,-1\}$.

☐wahr ☐falsch

Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Bilinearform $f \neq 0$ auf V mit $f(x,y) = \epsilon f(y,x)$ und $\epsilon \notin \{1,-1\}$.

☐wahr ☐falsch

Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt eine Bilinearform $f \neq 0$ auf V mit $f(x,y) = \epsilon f(y,x)$ und $\epsilon \notin \{1,-1\}$.

☐wahr ☐falsch

Aufgabe 6

Sei V ein endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $[\beta]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \{0, 1, -1\}$ für $1 \leq i \leq n$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $[\beta]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq n$.

□wahr □falsch

Sei V ein endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $[\beta]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ für $1 \leq i \leq n$.

□wahr □falsch

Sei V ein endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $[\beta]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \{0, 1, -1\}$ für $1 \leq i \leq n$.

□wahr □falsch

Aufgabe 7

Sei V ein endlich-dimensionale K-Vektorraum und β eine alternierende Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sind $v, w \in V$ und gilt $\beta(v, w) \neq 0$, so sind v und w linear unabhängig.

□wahr □falsch

Sei V ein endlich-dimensionale K-Vektorraum mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und β eine schief-symmetrisch Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sind $v, w \in V$ und gilt $\beta(v, w) \neq 0$, so sind v und w linear unabhängig.

□wahr □falsch

Sei V ein endlich-dimensionale K-Vektorraum und β eine alternierende Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sind $v, w \in V$ und gilt $\beta(v, w) \neq 0$, so gibt es keine $a, b \in K$ mit $av = bw$.

□wahr □falsch

Sei V ein endlich-dimensionale K-Vektorraum mit $\text{char}(K) \neq 2$ und β eine schief-symmetrisch Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sind $v, w \in V$ und gilt $\beta(v, w) \neq 0$, so gibt es keine $a, b \in K$ mit $av = bw$.

☐wahr ☐falsch

Aufgabe 8

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearformen gegeben durch

$f(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1,$

$g(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1.$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{R}^3$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ○ wahr ○falsch

---

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearformen gegeben durch

$f(x, y) = 2x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_1,$

$g(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 4x_1y_3 - 4x_3y_1.$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{R}^3$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ○ wahr ○falsch

---

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearformen gegeben durch

$f(x, y) = 3x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_3 - 3x_2y_1 - x_3y_2 + 2x_3y_1,$

$g(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_1y_3 - 2x_3y_1.$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{R}^3$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ○ wahr ○falsch

---

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearformen gegeben durch

$f(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1,$

$g(x,y) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1.$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basen B, B' von $\mathbb{R}^3$, sodass $[f]_B = [g]_{B'}$, wobei $[f]_B$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B und $[g]_{B'}$ die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis B' ist. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 9

Seien $V = M_2(K)$ und $\beta : V \times V \to K$ die Bilinearform gegeben durch $\beta(A,B) := \mathrm{Sp}(AB)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform β ist nicht-ausgeartet.

▯wahr ▯falsch

Seien $V = M_2(K)$ und $\beta : V \times V \to K$ die Bilinearform gegeben durch $\beta(A,B) := \mathrm{Sp}(AB)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform β ist nicht-ausgeartet.

▯wahr ▯falsch

Seien $V = M_2(K)$ und $\beta : V \times V \to K$ die Bilinearform gegeben durch $\beta(A,B) := \mathrm{Sp}(AB)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform β ist nicht-ausgeartet.

▯wahr ▯falsch

Seien $V = M_2(K)$ und $\beta : V \times V \to K$ die Bilinearform gegeben durch $\beta(A,B) := \mathrm{Sp}(AB)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Bilinearform β ist nicht-ausgeartet.

▯wahr ▯falsch

Aufgabe 10

Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit n ungerade. Sei $f := x^T F y$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform mit $F \in M_n(\mathbb{R})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[f]_{\mathcal{B}} = -F$ ist.

☐wahr ☐falsch

Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit n ungerade. Sei $f := x^T F y$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform mit $F \in M_n(\mathbb{R})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[f]_{\mathcal{B}} = -F$ ist.

☐wahr ☐falsch

Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit n ungerade. Sei $f := x^T F y$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform mit $F \in M_n(\mathbb{R})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[f]_{\mathcal{B}} = -F$ ist.

☐wahr ☐falsch

Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit n ungerade. Sei $f := x^T F y$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform mit $F \in M_n(\mathbb{R})$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt keine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[f]_{\mathcal{B}} = -F$ ist.

☐wahr ☐falsch