ONLINE-TEST 9

Aufgabe 1

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 + 3x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 4x_2y_1 + 6x_2y_2 + 4x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 - y_1 + x_2 - y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 + 3x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1 + y_1 + x_2 - y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Die Funktion $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1 - y_1 + x_2 - y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 2

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((1, 1), (1, -1)) = 2$, $s((-1, -1), (-1, -1)) = 4$ und $s((2, -2), (-2, 2)) = -16$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((1,1),(1,-1)) = 6$, $s((-2,-2),(2,2)) = -32$ und $s((1,-1),(1,-1)) = 4$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((1,1),(1,-1)) = -2$, $s((-1,-1),(-1,-1)) = 8$ und $s((1,-1),(-2,2)) = -8$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sodass $s((2,2),(1,-1)) = -12$, $s((-2,-2),(1,1)) = -8$ und $s((1,-1),(3,-3)) = 24$.

Ergänzen Sie die richtigen Antworten.

$s((1,0),(0,1)) =$ ☐.

$s((1,0),(1,0)) =$ ☐.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^4$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $t(v,w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$, wenn f ein Isomorphismus ist. ◯ wahr ◯ falsch

---

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^3$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $t(v, w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, wenn f ein Isomorphismus ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^4$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $t(v, w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$, wenn f ein Isomorphismus ist. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Mit s bezeichnen wir das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^3$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Funktion $t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $t(v, w) = s(f(v), f(w))$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, wenn f ein Isomorphismus ist. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 4

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2bx_1y_2 - 2bx_2y_1 + 4bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

▯s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

▯s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

▯s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b < 3$.

▯alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_1 - 3bx_1y_2 - 3bx_2y_1 + 9bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

▯s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

▯s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

▯s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b < 5$.

▯alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 5bx_1y_2 - 5bx_2y_1 +$

$25bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

□ s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

□ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b < 2$.

□ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

□ alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 6bx_1y_2 - 6bx_2y_1 + 36bx_2y_2$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

□ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $0 < b \leq 1$.

□ s ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn $b > 0$.

□ s ist kein Skalarprodukt für alle $b \in \mathbb{R}$.

□ alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 5

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt ein Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$, sodass $s((x, y), (x, y)) = x^2+y^2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $s((1, 0), (0, 1)) = 1$. ◯ wahr ◯ falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt ein Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$, sodass $s((x, y), (x, y)) = x^2+y^2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $s((0, 1), (1, 0)) = 2$. ◯ wahr ◯ falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt kein Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$, sodass $s((x, y), (x, y)) = x^2+y^2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $s((1, 0), (0, 1)) \neq 0$. ◯ wahr ◯ falsch

---

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gibt kein Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$, sodass $s((x, y), (x, y)) = x^2+y^2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $s((1, 0), (0, 1)) > 0$. ◯ wahr ◯ falsch

Aufgabe 6

Sei $\mathbb{R}_2[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] : \mathsf{Grad}(p) \leq 2\}$ euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt gegeben durch $s(X^i, X^j) = 2/(i+j+1)$, falls $i+j+1$ ungerade, und $s(X^i, X^j) = 0$, falls $i+j+1$ gerade. Betrachten Sie die Basis $v_0 = 1, v_1 = X, v_2 = X^2$ von $\mathbb{R}_2[X]$ und sei s_0, s_1, s_2 die Basis, die aus dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren entsteht.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $s_0 = \frac{1}{2}$.

☐ $s_1 = X$.

☐ $s_2 = X^2 - \frac{2}{3}$.

☐ $s_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

Sei $\mathbb{R}_2[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] : \mathsf{Grad}(p) \leq 2\}$ euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt gegeben durch $s(X^i, X^j) = 2/(i+j+1)$, falls $i+j+1$ ungerade, und $s(X^i, X^j) = 0$, falls $i+j+1$ gerade. Betrachten Sie die Basis $v_0 = 1, v_1 = X, v_2 = X^2$ von $\mathbb{R}_2[X]$ und sei s_0, s_1, s_2 die Basis, die aus dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren entsteht.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $s_0 = 1$.

☐ $s_0 = \frac{1}{2}$.

☐ $s_1 = X$.

☐ $s_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

Sei $\mathbb{R}_2[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] : \mathsf{Grad}(p) \leq 2\}$ euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt gegeben durch $s(X^i, X^j) = 2/(i+j+1)$, falls $i+j+1$ ungerade, und $s(X^i, X^j) = 0$, falls $i+j+1$ gerade. Betrachten Sie die Basis $v_0 = 1, v_1 = X, v_2 = X^2$ von $\mathbb{R}_2[X]$ und sei s_0, s_1, s_2 die Basis, die aus dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren entsteht.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ $s_0 = 1$.

☐ $s_1 = X$.

☐ $s_1 = \frac{2}{3}X$.

☐ $s_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

Sei $\mathbb{R}_2[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] : \mathsf{Grad}(p) \leq 2\}$ euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt gegeben durch $s(X^i, X^j) = 2/(i+j+1)$, falls $i+j+1$ ungerade, und $s(X^i, X^j) = 0$, falls $i+j+1$ gerade. Betrachten Sie die Basis $v_0 = 1, v_1 = X, v_2 = X^2$ von $\mathbb{R}_2[X]$ und sei s_0, s_1, s_2 die Basis, die aus dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren entsteht.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ $s_0 = 1$.

□ $s_1 = \frac{2}{3}X$.

□ $s_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

□ $s_2 = X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{1}{2}$.

Aufgabe 7

Betrachten Sie den euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt und den Unterraum $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 2y - z = 0 \text{ und } -x + y + 4w = 0\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ $(5, 5, -2, 4) \in V^\perp$.

□ $(3, 2, -1, 0) \in V^\perp$.

□ $V^\perp = [\{(4, 1, -1, -4), (2, 3, -1, 4)\}]$.

□ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Betrachten Sie den euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt und den Unterraum $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 2y - z = 0 \text{ und } -x + y + 4w = 0\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ $(-1, 1, 0, 4) \in V^\perp$.

□ $(4, 1, -1, -4) \in V^\perp$.

□ $V^\perp = [\{(5, 5, -2, 4), (2, 3, -1, 4)\}]$.

□ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Betrachten Sie den euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt und den Unterraum $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 2y - z = 0 \text{ und } -x + y + 4w = 0\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ $(2, 3, -1, 4) \in V^\perp$.

□ $(3, 2, -1, 0) \in V^\perp$.

□$V^\perp = [\{(4,1,-1,-4),(5,5,-2,4)\}]$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Betrachten Sie den euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt und den Unterraum $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 3x+2y-z=0 \text{ und } -x+y+4w=0\}$.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$(2,3,-1,4) \in V^\perp$.

□$(-1,1,0,4) \in V^\perp$.

□$V^\perp = [\{(5,5,-2,4),(4,1,-1,-4)\}]$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 8

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $W^\perp = \langle x \rangle$ der zu W orthogonale Raum.

Berechnen Sie einen passenden Vektor x!

$x = (1$ ☐ ☐$)^T$.

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $W^\perp = \langle x \rangle$ der zu W orthogonale Raum.

Berechnen Sie einen passenden Vektor x!

$x = (1$ ☐ ☐$)^T$.

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $W^\perp = \langle x \rangle$ der zu W orthogonale Raum.

Berechnen Sie einen passenden Vektor x!

$x = (1$ ☐ ☐$)^T$.

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $W^\perp = \langle x \rangle$ der zu W orthogonale Raum.

Berechnen Sie einen passenden Vektor x!

$x = (1\ \square\ \square)^T$.

Aufgabe 9

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = n$ und sei β eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Dimension eines Unterraums $U \leq V$ mit $\beta|_U = 0$ ist nicht größer als $n/2$. Es existiert ein V und ein Unterraum $U \leq V$ der Dimension $n/2$ sowie eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform β mit $\beta|_U = 0$.

☐ wahr ☐ falsch

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = n$ und sei β eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Dimension eines Unterraums $U \leq V$ mit $\beta|_U = 0$ ist nicht größer als $n/2$. Es existiert ein V und ein Unterraum $U \leq V$ der Dimension $n/2$ sowie eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform β mit $\beta|_U = 0$.

☐ wahr ☐ falsch

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = n$ und sei β eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Dimension eines Unterraums $U \leq V$ mit $\beta|_U = 0$ ist nicht größer als $n/2$. Es existiert ein V und ein Unterraum $U \leq V$ der Dimension $n/2$ sowie eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform β mit $\beta|_U = 0$.

☐ wahr ☐ falsch

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = n$ und sei β eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Dimension eines Unterraums $U \leq V$ mit $\beta|_U = 0$ ist nicht größer als $n/2$. Es existiert ein V und ein Unterraum $U \leq V$ der Dimension $n/2$ sowie eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform β mit $\beta|_U = 0$.

☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 10

Sei V ein euklidischer Vektorraum, $\dim V = n$ und $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis von V. Sei $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\det G > 0$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein euklidischer Vektorraum, $\dim V = n$ und $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis von V. Sei $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\det G > 0$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein euklidischer Vektorraum, $\dim V = n$ und $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis von V. Sei $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\det G > 0$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein euklidischer Vektorraum, $\dim V = n$ und $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis von V. Sei $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\det G > 0$.

☐wahr ☐falsch