ONLINE-TEST 10

——— Aufgabe 1 ———

Sei $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ $\det(A)^2 = 1$.

◯ $\mathsf{Sp}(A)^2 = 1$.

◯ $\mathsf{Sp}(A) = n$.

◯ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ $\mathsf{Sp}(A) = n$.

◯ $\det(A) = 0$.

◯ $|\det(A)| = 1$.

◯ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

◯ $\mathsf{Sp}(A) = 0$.

◯ $\det(A)^2 = 1$.

◯ $\mathsf{Sp}(A) = n$.

◯ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Matrix $A = [v_1|\cdots|v_n]$.

Wählen Sie die wahre Aussage aus.

○ $\mathsf{Sp}(A) = n$.

○$|\det(A)| = 1$.

○$\mathsf{Sp}(A) = 0$.

○Alle obigen Aussagen sind falsch.

——— Aufgabe 2 ———

Betrachten Sie das Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 3, s((0,1),(0,1)) = 1/3$ und $s((1,0),(0,1)) = 1/\sqrt{2}$. Sei α der Winkel zwischen $(2,0)$ und $(0,3)$ bezüglich s.

Wählen Sie die wahre Aussage aus

○ $\alpha = 0$.

○$\alpha = 1/\sqrt{2}$.

○$\alpha = 7\pi/4$.

○$\alpha = \pi/2$.

○$\alpha = \pi/3$.

○$\alpha = \pi/4$.

Betrachten Sie das Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 3, s((0,1),(0,1)) = 1/3$ und $s((1,0),(0,1)) = 1/\sqrt{2}$. Sei α der Winkel zwischen $(-1,0)$ und $(0,-4)$ bezüglich s.

Wählen Sie die wahre Aussage aus

○ $\alpha = 1/\sqrt{2}$..

○$\alpha = 7\pi/4$.

○$\alpha = 0$.

○$\alpha = \pi/2$.

○$\alpha = \pi/3$.

○$\alpha = \pi/4$.

Betrachten Sie das Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 3, s((0,1),(0,1)) = 1/3$ und $s((1,0),(0,1)) = 1/\sqrt{2}$. Sei α der Winkel zwischen $(3,0)$ und $(0,2)$ bezüglich s.

Wählen Sie die wahre Aussage aus

○ $\alpha = 0$.

○$\alpha = 1/\sqrt{2}$.

○$\alpha = \pi/2$.

○$\alpha = \pi/4$.

○$\alpha = \pi/3$.

○$\alpha = 7\pi/4$.

Betrachten Sie das Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 3, s((0,1),(0,1)) = 1/3$ und $s((1,0),(0,1)) = 1/\sqrt{2}$. Sei α der Winkel zwischen $(-2,0)$ und $(0,-3)$ bezüglich s.

Wählen Sie die wahre Aussage aus

○ $\alpha = 0$.

○$\alpha = 1/\sqrt{2}$.

○$\alpha = \pi/3$.

○$\alpha = \pi/4$.

○$\alpha = 7\pi/4$.

○$\alpha = \pi/2$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Sesquilinearform s auf $\mathbb{C}^4$ mit darstellender Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ -i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Form s ist ein Skalarprodukt. ○ wahr ○falsch

Betrachten Sie die Sesquilinearform s auf $\mathbb{C}^4$ mit darstellender Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ -i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Form s ist ein Skalarprodukt. ○ wahr ○falsch

Betrachten Sie die Sesquilinearform s auf $\mathbb{C}^4$ mit darstellender Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & i & 0 \\ i & -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Form s ist ein Skalarprodukt. ◯ wahr ◯falsch

Betrachten Sie die Sesquilinearform s auf $\mathbb{C}^4$ mit darstellender Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & i & 0 \\ i & -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Form s ist ein Skalarprodukt. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 4

Wählen Sie die wahre Aussagen aus.

☐Die Menge der hermiteschen $n \times n$-Matrizen ist ein Unterraum von $M_n(\mathbb{C})$.

☐Es existiert eine hermitesche Matrix $A = (a_{i,j})_{i \leq i,j \leq n}$ mit $\mathrm{Im}(a_{i,j}) \neq 0$ für alle i, j. Hier bezeichnet $\mathrm{Im}(a)$ den Imaginärteil von $a \in \mathbb{C}$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wählen Sie die wahre Aussagen aus.

☐Die Menge der hermiteschen $n \times n$-Matrizen ist ein Unterraum von $M_n(\mathbb{C})$.

☐Es existiert eine hermitesche Matrix $A = (a_{i,j})_{i \leq i,j \leq n}$ mit $\mathrm{Im}(a_{i,j}) \neq 0$ für alle i, j. Hier bezeichnet $\mathrm{Im}(a)$ den Imaginärteil von $a \in \mathbb{C}$.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wählen Sie die wahre Aussagen aus.

☐Die Menge der hermiteschen $n \times n$-Matrizen ist ein Unterraum von $M_n(\mathbb{C})$.

□Es existiert eine hermitesche Matrix $A = (a_{i,j})_{i \leq i,j \leq n}$ mit $\mathrm{Im}(a_{i,j}) \neq 0$ für alle i, j. Hier bezeichnet $\mathrm{Im}(a)$ den Imaginärteil von $a \in \mathbb{C}$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wählen Sie die wahre Aussagen aus.

□Die Menge der hermiteschen $n \times n$-Matrizen ist ein Unterraum von $M_n(\mathbb{C})$.

□Es existiert eine hermitesche Matrix $A = (a_{i,j})_{i \leq i,j \leq n}$ mit $\mathrm{Im}(a_{i,j}) \neq 0$ für alle i, j. Hier bezeichnet $\mathrm{Im}(a)$ den Imaginärteil von $a \in \mathbb{C}$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

———— Aufgabe 5 ————

Sei $A = B + iC \in M_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix mit $B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

Wählen Sie die wahren Aussagen aus.

□Die Matrix B ist symmetrisch.

□Die Matrix B ist schief-symmetrisch.

□Die Matrix C ist symmetrisch.

□Die Matrix C ist schief-symmetrisch.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $A = B + iC \in M_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix mit $B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

Wählen Sie die wahren Aussagen aus.

□Die Matrix B ist symmetrisch.

□Die Matrix B ist schief-symmetrisch.

□Die Matrix C ist symmetrisch.

□Die Matrix C ist schief-symmetrisch.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $A = B + iC \in M_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix mit $B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

Wählen Sie die wahren Aussagen aus.

☐Die Matrix B ist symmetrisch.

☐Die Matrix B ist schief-symmetrisch.

☐Die Matrix C ist symmetrisch.

☐Die Matrix C ist schief-symmetrisch.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Sei $A = B + iC \in M_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix mit $B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

Wählen Sie die wahren Aussagen aus.

☐Die Matrix B ist symmetrisch.

☐Die Matrix B ist schief-symmetrisch.

☐Die Matrix C ist symmetrisch.

☐Die Matrix C ist schief-symmetrisch.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch.

Aufgabe 6

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standard-Skalarprodukt. Seien $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschiedene Vektoren in V. Nehmen wir an, dass der Winkel zwischen v_i und v_j gleich $\pi/3$ für alle $i \neq j$ ist.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt $k \leq 3$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standard-Skalarprodukt. Seien $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschiedene Vektoren in V. Nehmen wir an, dass der Winkel zwischen v_i und v_j gleich $\pi/3$ für alle $i \neq j$ ist.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt $k \leq 3$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standartd-Skalarprodukt. Seien $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschiedene Vektoren in V. Nehmen wir an, dass der Winkel zwischen v_i und v_j gleich $\pi/3$ für alle $i \neq j$ ist.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt $k \leq 3$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standard-Skalarprodukt. Seien $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschiedene Vektoren in V. Nehmen wir an, dass der Winkel zwischen v_i und v_j gleich $\pi/3$ für alle $i \neq j$ ist.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Es gilt $k \leq 3$.

☐wahr ☐falsch

Aufgabe 7

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standard-Skalarprodukt. Sei A und B zwei selbstadjungierte Operatoren auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ für alle $x \in V$ impliziert $A = B$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standard-Skalarprodukt. Sei A und B zwei selbstadjungierte Operatoren auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ für alle $x \in V$ impliziert $A = B$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standard-Skalarprodukt. Sei A und B zwei selbstadjungierte Operatoren auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ für alle $x \in V$ impliziert $A = B$.

☐wahr ☐falsch

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Standard-Skalarprodukt. Sei A und B zwei selbstadjungierte Operatoren auf V.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ für alle $x \in V$ impliziert $A = B$.

☐wahr ☐falsch

Aufgabe 8

Sei s das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 1, s((0,1),(0,1)) = 1$ und $s((2,0),(0,1)) = 1$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(1,0) = (1,2)$ und $f(0,1) = (2,1)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung f ist selbstadjungiert bezüglich s. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei s das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 1, s((0,1),(0,1)) = 1$ und $s((2,0),(0,1)) = 1$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(1,0) = (2,2)$ und $f(0,2) = (-1,2)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung f ist selbstadjungiert bezüglich s. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei s das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((2,0),(3,0)) = 6, s((0,1),(0,2)) = 2$ und $s((2,0),(0,1)) = 1$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(1,0) = (-3,2)$ und $f(0,1) = (0,1)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung f ist selbstadjungiert bezüglich s. ◯ wahr ◯falsch

---

Sei s das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 1, s((0,1),(0,1)) = 1$ und $s((2,0),(0,1)) = 1$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(1,0) = (-4,2)$ und $f(0,2) = (-7,2)$.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Die Abbildung f ist selbstadjungiert bezüglich s. ◯ wahr ◯falsch

Aufgabe 9

Betrachten Sie den unitären $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit Skalarprodukt s gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 2$, $s((0,1),(0,1)) = 2$ und $s((1,0),(0,1)) = i$. Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $f(-i,1) = (1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}+i)$ und $f(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}-i, 1-\sqrt{3}i)$. Mit f^* bezeichnen wir die zu f adjungierte lineare Abbildung.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐$f^*(-i,1) = (-1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}+i)$

□f^* ist selbstadjungiert.

□$f^*(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (-\sqrt{3} - i, 1 + \sqrt{3}i)$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Betrachten Sie den unitären $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit Skalarprodukt s gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 2$, $s((0,1),(0,1)) = 2$ und $s((1,0),(0,1)) = i$. Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $f(-i,1) = (1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}+i)$ und $f(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}-i, 1-\sqrt{3}i)$. Mit f^* bezeichnen wir die zu f adjungierte lineare Abbildung.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$f^*(-i, 1) = (-1 + \sqrt{3}i, \sqrt{3} - i)$

□f^* ist selbstadjungiert.

□$f^*(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (-\sqrt{3} + i, 1 + \sqrt{3}i)$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Betrachten Sie den unitären $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit Skalarprodukt s gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 2$, $s((0,1),(0,1)) = 2$ und $s((1,0),(0,1)) = i$. Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $f(-i,1) = (1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}+i)$ und $f(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}-i, 1-\sqrt{3}i)$. Mit f^* bezeichnen wir die zu f adjungierte lineare Abbildung.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$f^*(-i, 1) = (1 + \sqrt{3}i, \sqrt{3} - i)$

□f ist selbstadjungiert.

□$f^*(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (-\sqrt{3} - i, 1 + \sqrt{3}i)$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

Betrachten Sie den unitären $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit Skalarprodukt s gegeben durch $s((1,0),(1,0)) = 2$, $s((0,1),(0,1)) = 2$ und $s((1,0),(0,1)) = i$. Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $f(-i,1) = (1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}+i)$ und $f(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}-i, 1-\sqrt{3}i)$. Mit f^* bezeichnen wir die zu f adjungierte lineare Abbildung.

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$f^*(-i, 1) = (-1 + \sqrt{3}i, \sqrt{3} - i)$

□f^* ist selbstadjungiert.

□$f^*(\sqrt{3}i, \sqrt{3}) = (-\sqrt{3} - i, 1 + \sqrt{3}i)$.

□Alle obigen Aussagen sind falsch.

———— Aufgabe 10 ————

Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt. Sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $A^* : V \to V$ die adjugierte lineare Abbildung. Sei $U \leq V$ ein A-invarianter Unterraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$U^\perp$ ist A^*-invariant.

□wahr □falsch

Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt. Sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $A^* : V \to V$ die adjugierte lineare Abbildung. Sei $U \leq V$ ein A-invarianter Unterraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$U^\perp$ ist A^*-invariant.

□wahr □falsch

Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt. Sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $A^* : V \to V$ die adjugierte lineare Abbildung. Sei $U \leq V$ ein A-invarianter Unterraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$U^\perp$ ist A^*-invariant.

□wahr □falsch

Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt. Sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $A^* : V \to V$ die adjugierte lineare Abbildung. Sei $U \leq V$ ein A-invarianter Unterraum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

$U^\perp$ ist A^*-invariant.

□wahr □falsch