§2 Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit

2.1 Bsp: Theo Kontrollato von der Stuttgarter Polizei soll die neuen Corona-Regeln in der Stadt durchsetzen. Der Einfachheithalber nehmen wir an, Stuttgart liegt in der Ebene, also im $\mathbb{R}^2$. Oberwachtmeister Kontrollato arbeitet sich systematisch durch sein Revier, ausgehend von der Polizeistation, die durch den Punkt $\binom{1}{0}$ gegeben ist. Seine Fortbewegung pro Minute sei durch $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$ beschrieben, mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. An welchem Ort befindet sich der Oberwachtmeister

- nach einer Minute:
- nach zwei Minuten:
- nach drei Minuten:

- nach 100 Minuten?

(In typischen Anwendungen geht es um Ausbreitung von Gasen, oder Partikeln, deren Bewegung simuliert werden soll)

2.2 Bem:

(a) Im vorigen Beispiel benötigen wir eine Formel für A^m, mit $m \in \mathbb{N}$. Wie lösen Sie dasselbe Problem für größere Matrizen, zB. für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; ?$$

Läßt sich dieses Problem ohne Computer für beliebige Matrizen lösen?

(b) Sei $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

In diesem Fall wissen wir:

$$A^m = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \mathrm{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m),$$

das Problem ist in diesem Fall also leicht lösbar. Das wollen wir uns im Folgenden zu Nutze machen. Aus LA I wissen wir außerdem, Multiplikation mit einer Matrix A ist der Prototyp der linearen Abbildungen. Wir ändern im Folgenden unsere Sichtweise, und studieren unser Problem mit Hilfe von linearen Abbildungen. Hier haben wir den Vorteil, daß wir dieselbe lineare Abbildung bezüglich verschiedener Basen studieren können.

Wiederholen Sie LA I, Kapitel 7+8.

2.3 <u>Def</u>: Sei K Körper und V ein endlich-dimensionaler K-VR. Eine lineare Abbildung $T: V \to V$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn es eine Basis B von V gibt mit $M_B(T)$ ist eine Diagonalmatrix.

2.4 <u>Bem</u>: (Wiederholung)
Aus LA I wissen wir, wie man einen Basiswechsel macht: Sei $\mathcal{C}$ eine weitere Basis von V. Betrachte den Endomorphismus

$$\underset{\mathcal{C}}{V} \xrightarrow{id} \underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{B}{V} \xrightarrow{id} \underset{\mathcal{C}}{V}.$$

mit Basen
Dann gilt für die darstellende Matrix

$$M_{\mathcal{C}}(T) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

bzw. $$M_B(T) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Umgekehrt definiert jede invertierbare Matrix P einen Basiswechsel: Sei V VR mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\} = B$. Definiere $v_i' \in V$ durch den Koordinatenvektor

$$M_B(v_i') = P \cdot M_B(v) \quad (\text{oder } P^{-1} M_B(v)).$$

Dann ist $C := \{v_1', \dots, v_n'\}$ Basis von V.
Warum?

Nennen wir Matrix $A \in M_n(K)$ diagonalisierbar, genau dann, wenn die zugehörige lineare Abbildung $T_A : K^n \to K^n,\ x \mapsto Ax$, diagonalisierbar ist, so entspricht dies also der folgenden Definition:

2.5 Def: Sei $A \in M_n(K)$. Dann ist A <u>diagonalisierbar</u>
$:\Leftrightarrow$ $\exists\, D \in M_n(K)$ Diagonalmatrix und $P \in GL_n(K)$ gibt mit $PAP^{-1} = D$.
$\Leftrightarrow$ $\exists\, D$ Diagonalmatrix, $P \in GL_n(K)$ gibt mit $P^{-1}AP = D$.

2.6 Bsp:
(a) Jede Diagonalmatrix ist diagonalisierbar.
(b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar:
Sei $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$, sei $d := \det P$.
Dann ist $P^{-1} =$ (mit $d \neq 0$)

Angenommen es existieren $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

$=$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Dies ist ein Widerspruch, denn:

27 Bem: Zurück zu Oberwachtmeister Kontrollato.
Sei $A \in M_n(K)$ seine Bewegungsmatrix, siehe 21.
Angenommen A ist diagonalisierbar, dh. es
existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und eine Matrix $P = (p_{ij}) \in GL_n(K)$
mit $PAP^{-1} = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dann läßt sich
aus $A \overset{(+)}{=} P^{-1}DP$ eine beliebige Potenz von A
gut berechnen: Es ist

$$A^m \overset{(+)}{=} (P^{-1}DP)^m \underset{\text{ausmultipl.}}{=} \underset{\text{vereinfachen}}{=}$$

Fragen, die hingegen offen bleiben sind:
- Wann ist eine Matrix $A \in M_n(K)$ diagonalisierbar?
- Wie findet man in diesem Fall $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, und
- wie findet man $P \in GL_n(K)$ mit $PAP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$?