Wir wollen die Fragestellungen, die wir betrachten noch genauer charakterisieren. Hierzu wiederholen wir aus LA I:

2.8 Def: Seien $A, B \in M_n(K)$.

(a) Dann ist A äquivalent zu B, falls es $P, Q \in Gl_n(K)$ gibt mit $P^{-1}AQ = B$.

(b) Dann ist A ähnlich zu B, falls es $P \in Gl_n(K)$ gibt mit $P^{-1}AP = B$.

Wir betrachten zunächst Äquivalenz von Matrizen.

2.9 **Lemma**: Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

(i) reflexiv:

(ii) symmetrisch:

(iii) transitiv:

2.10 **Bem**: (a) Seien $A, B \in M_n(K)$ äquivalente Matrizen.
Was ist ein besonders schöner Vertreter der Äquivalenzklasse $[A] = [B]$ von A bzw B?
Wie findet man $P, Q \in Gl_n(K)$ mit $P^{-1}AQ = B$?
Wir kennen die Antwort hierzu aus LA I:
Mittels elementarer Zeilenumformungen bringen wir die Matrix A auf Zeilen-reduzierte Stufenform.
Dies entspricht Multiplikation von A von ______
mit Elementarmatrizen. Mittels elementarer Spaltenumformungen, also Multiplikation von A von ______, erhalten wir: Es existieren Matrizen $P, Q \in Gl_n(K)$ mit

$$PAQ^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Anzahl der Äquivalenzklassen für $M_n(K)$ bezüglich der gegebenen Äquivalenzrelation ist also: ______

(b) Wir formulieren eine analoge Aussage für lineare Abbildungen, in etwas allgemeinerer Form:

Sei V ein K-VR mit Basis $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Sei W ein K-VR mit Basis $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$.

[In (a) haben wir den Spezialfall $n = m$ betrachtet.]

Sei $T: V \to W$ linear mit $A := M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(T)$.

Wir wechseln die Basis:

- Definiere v_i' durch den Koordinatenvektor

$$M_{\mathcal{B}_V}(v_i') = P\, M_{\mathcal{B}_V}(v_i).$$

Definiere w_j' durch den Koordinatenvektor

$$M_{\mathcal{B}_W}(w_j') = Q\, w_j.$$

Nach Bem. 2.4 ist dann

- $\mathcal{C}_V := \{v_1', \dots, v_n'\}$ Basis von V, und
- $\mathcal{C}_W := \{w_1', \dots, w_m'\}$ Basis von W,

und es gilt

$$M^{\mathcal{C}_V}_{\mathcal{C}_W}(T) = \left(\quad \right)$$

mit $0 \leq r \leq \min\{n, m\}$. Das zugehörige Bild ist

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{id} & V & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{id} & W, \end{array}$$

mit Basen $\mathcal{C}_V$ $\quad \mathcal{B}_V \quad \mathcal{B}_W \quad \mathcal{C}_W$.

Thm 2.18 in linearer Algebra I besagt:

2.11 <u>Thm</u>: Zu jeder linearen Abb. $T: V \to W$ existieren Basen $\mathcal{C}_V$ und $\mathcal{C}_W$ von V bzw W mit darstellender Matrix

$$M^{\mathcal{C}_V}_{\mathcal{C}_W}(T) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

<u>Beweis</u>: In 2.10 haben wir bereits hierzu einen Beweis gegeben. Hier geben wir noch einen weiteren Beweis mittels abstrakter linearer Algebra.

Wähle Basis $\{u_1, \dots, u_s\}$ von $\operatorname{Ker} T \leq V$, und ergänze diese durch Vektoren $\{v_1, \dots, v_r\}$ zu einer Basis von V.
Dann ist nach LA I die Menge $\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$ eine Basis von $\operatorname{im} T \leq W$. (Warum?)
Diese ergänzen wir durch Vektoren $\{w_1, \dots, w_t\}$ zu einer Basis von W.

Sei $B_V := \{u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_r\}$

$B_W := \{Tv_1, \dots, Tv_r, w_1, \dots, w_t\}$

Dann ist

$$M^{B_V}_{B_W}(T) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\square$

2.12 Bem:

(a) Analog zu Lemma 2.9 gilt: Ähnlichkeit von Matrizen in $M_n(K)$ ist eine Äquivalenzrelation. Wir suchen nach besonders schönen Repräsentanten in den Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Dies ist eine erheblich schwierigere Frage als für Äquivalenz von Matrizen. In diesem Kapitel wollen wir einen Spezialfall klären: Wann enthält eine Äquivalenzklasse $[A]$ eine Diagonalmatrix, d.h. wann ist A diagonalisierbar?

(b) Analog wie in 2.10 (b) können wir das in (a) beschriebene Problem in der Sprache der linearen Abbildungen formulieren: Sei $T: V \to V$ linear, also Endomorphismus, mit V endlich-dimensionalen K-VR. Dann ist unsere Frage: Gibt es eine Basis B, so daß die darstellende Matrix $M_B(T) = M_B^B(T)$ eine besonders schöne Form hat? Beachten Sie: Wir erlauben nur die Wahl einer Basis, derselben Basis im Definitionsbereich wie im Bildbereich. Die Antwort ist durch die Jordan-Normalform gegeben, die wir im Verlauf der Vorlesung behandeln werden – zumindest wenn der zugrundeliegende Körper $K = \mathbb{C}$ ist.

Wir betrachten zunächst Eigenschaften quadratischer Matrizen, die bei ähnlichen Matrizen gleich sind, also Invarianten ähnlicher Matrizen.

2.13 Def: Sei $A \in M_n(K)$. Definiere $Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, die Spur von $A = (a_{ij})$.

2.14 Lemma:

Seien $A, B \in M_n(K)$ zueinander ähnlich. Dann ist

(a) $\det A = \det B$,

(b) $Sp\, A = Sp\, B$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ex. $P \in Gl_n(K)$ mit $A = PBP^{-1}$.

(a) Es folgt

$$\det A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$= \det B$$

(b) Für beliebige Matrizen $X, Y \in M_n(K)$ gilt:

$$Sp(XY) = \sum_{i=1}^{n} (XY)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot y_{ji}$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} y_{ij}\, x_{ji} = \sum_{i=1}^{n} (YX)_{ii} = Sp(YX)$$

Mit $X = BP^{-1}$ und $Y = P$ folgt:

$$Sp\, A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = Sp\, B.$$

2.15 Bsp: Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist $Sp\, A = \_\_\_\_$, $\det A = \_\_\_\_$.

Dann ist A nicht ähnlich zu einer Matrix der Form $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_2(K)$, mit $0 \le r \le 2$, denn:

Das Klassifikationsproblem für ähnliche Matrizen ist also anders als das äquiv. Matrizen.

Die bewiesene Invarianz (siehe 2.14) der Determinante und Spur ~~bei~~ bei ähnlichen Matrizen erlaubt es uns, diese Konzepte auf Endomorphismen zu übertragen.

2.16 **Def**: Sei V endl.-dim. K-VR, sei $T: V \to V$ linear.
Definiere

$$\det T := \det M_B(T), \text{ Determinante von } T,$$
$$\operatorname{Sp} T := \operatorname{Sp} M_B(T), \text{ Spur von } T,$$

mit $\mathcal{B}$ Basis von V.

2.17 **Bem**: (a) Nach Lemma 2.14 sind Determinante und Spur von Endomorphismen wohldefiniert,
zB. Ist B' weitere Basis von V, so ist

$$M_{B'}(T) \overset{2.4}{=} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Rightarrow \det M_{B'}(T) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$= \det M_B(T).$$

und $$\operatorname{Sp} M_{B'}(T) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

(b) Es gelten für die Determinante, Spur von linearen Abbildungen dieselben Eigenschaften wie für Determinante, Spur von Matrizen