Das meiste in Kapitel 2.1+2.2 war Erinnerung an Bekanntes aus LA I. Jetzt wollen wir uns den neuen Konzepten widmen, die durch Kap. 2.1+2.2 motiviert sind. Zunächst eine Motivation für die nächste Definition:

2.18 <u>Bem</u>: Angenommen $A \in M_n(K)$ ist diagonalisierbar. Dann ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $P \in Gl_n(K)$ mit

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Sei $(p_{ij}) = P = (v_1 | \dots | v_n)$ Matrix mit Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n$. Dann ist

$$PD = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ \lambda_1 p_{n1} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \left(\lambda_1 v_1 \middle| \cdots \middle| \lambda_n v_n \right).$$

Nach Voraussetzung ist $AP = PD$.

$\Rightarrow \quad A(v_1 | \dots | v_n) = AP = PD = (\lambda_1 v_1 | \dots | \lambda_n v_n)$.

$\Rightarrow \quad Av_i = \lambda_i v_i$ für $1 \le i \le n$.

Dies motiviert die folgende Definition:

2.19 <u>Def</u>: Sei $A \in M_n(K)$. Dann heißt ein Element $\lambda \in K$ <u>Eigenwert</u> (EW) von A, falls es $0 \neq x \in K^n$ gibt mit $Ax = \lambda x$. In diesem Fall heißt x ein Eigenvektor (EV) von A zum Eigenwert λ, und die Menge

$$\operatorname{Eig}(A, \lambda) := \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\}$$

heißt der <u>Eigenraum</u> von A zum EW λ.

(b) Sei $T: V \to V$ linear. Dann heißt $\lambda \in K$ ein Eigenwert von T, falls es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt mit $Tv = \lambda v$. In diesem Fall heißt der Vektor v Eigenvektor von T zum Eigenwert λ. Die Menge

$$\mathrm{Eig}(T,\lambda) := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

heißt Eigenraum von T zum Eigenwert λ.

2.20 Bem:

(a) Es ist $\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \mathrm{Eig}(T_A, \lambda)$ mit $T_A: K^n \to K^n; x \mapsto Ax$. Beachte $M_\mathcal{E}(T_A) = A$, $\mathcal{E}$ Standardbasis.

(b) Es ist $0 \neq v \in V$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ.
$\Leftrightarrow$ $M_B(v)$ ist Eigenvektor von $M_B(T)$ zum Eigenwert λ.
Hierbei ist B eine Basis von V.

Beweis:

(c) Die von Null verschiedenen Elemente im Eigenraum entsprechen genau den Eigenvektoren zum Eigenwert λ.
(Angenommen der Nullvektor wäre ein Eigenvektor
Dann gilt $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0 \quad \forall \lambda \in K$ (oder $T(0) = \lambda \cdot 0$).
Es würde folgen, daß jedes $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A bzw T ist. Dies hätte wenig Aussagekraft für eine gute Theorie. Per Definition gilt also:
Der Nullvektor ist kein Eigenvektor.)

2.21 Lemma:

Sei $\lambda \in K$, $T: V \to V$ linear. Dann ist auch $T - \lambda\, id_V \in End_K(V)$, also Endomorphismus von V, und es gilt: $Eig(T,\lambda)$ ist Unterraum von V, und

λ ist EW von T

$\Leftrightarrow$ $0 \neq Eig(T,\lambda) = Ker(T - \lambda\, id)$

$\Leftrightarrow$ $\det(T - \lambda\, id) = 0$.

Insbesondere ist Null ein EW von T

$\Leftrightarrow$ $Ker\, T \neq 0$

$\Leftrightarrow$ T nicht injektiv.

<u>Beweis</u>:

(a) Es ist T linear, id linear.
Da $End_K(V)$ ein K-VR ist, also abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation, additiven Inversen und Addition ist, folgt $T - \lambda\, id \in End_K(V)$.

(b) Es ist $Eig(T,\lambda) = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$

$= \{v \in V \mid (T - \lambda\, id)v = 0\}$

$= Ker(T - \lambda\, id_V)$

Damit ist $Eig(T,\lambda)$ ein Unterraum von V.

(c) Ist λ EW von T, so ist nach Def 2.19 $Eig(T,\lambda) \neq 0$, also nach (b) ist $T - \lambda\, id$ nicht bijektiv, d.h. $\det(T - \lambda\, id) = 0$.
Nach LA I ist ein Endomorphismus injektiv
(LA I, 7.11) $\Leftrightarrow$ surjektiv $\Leftrightarrow$ bijektiv. Damit folgt die Rückrichtung.

2.22 <u>Bsp</u>: Sei $K = \mathbb{Q}$.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

(i) $0 \neq \mathrm{Eig}(A, \lambda) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0$

$$\iff 0 = \det \begin{pmatrix} \lambda-4 & 1 \\ -5 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2)+5$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 2\lambda - 8 + 5$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-3).$$

$$\iff \lambda = -1 \text{ oder } \lambda = 3.$$

(ii) Wir berechnen den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,-1)$:

Es ist $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 4x - y = -x \\ 5x - 2y = -y \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 5x = y \\ 5x = y \end{array} \right\}$$

Also ist $\mathrm{Eig}(A,-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y = 5x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 5x \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{Q} \right\}$

$= \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$, ein 1-dimensionaler Eigenraum.

Wir berechnen den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,3)$:

(b) Sei $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen die Eigenwerte von $\tilde{A}$:

$\Rightarrow$ gilt $K = \mathbb{Q}$ (wie oben angegeben), so hat $\tilde{A}$ keine Eigenwerte.

Ist $K = \mathbb{R}$, dann

Ist $K = \mathbb{C}$, dann

Für $K =$ ___ berechnen wir die Eigenräume:

<u>Übung</u>: Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren für die folgenden Matrizen $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2.23 **Def:** Sei K ein Körper.

(a) Wir definieren das <u>charakteristische Polynom</u> χ_A einer quadratischen Matrix $A \in M_n(K)$ durch

$$\chi_A = \det(X I_n - A) \in K[X]$$

(b) Sei $T: V \longrightarrow V$ linear.
Das <u>charakteristische Polynom</u> χ_T von T ist definiert durch $\chi_T = \det(X \, id_V - T) \in K[X]$.

2.24 **Bem:** Sei K Körper.

(a) In Linearer Algebra haben wir den Körper $\mathbb{Q}$ aus dem Ring der ganzen Zahlen konstruiert, und dann $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ eingebettet. Der Körper $\mathbb{Q}$ bestand hierbei aus Äquivalenzklassen $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Dieselbe Konstruktion läßt sich auf den Polynomring $K[X]$ anwenden. Hierdurch erhält man den Körper $K(X)$ der rationalen Funktionen. Die Elemente in $K(X)$, also die rationalen Funktionen sind Äquivalenzklassen $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in K[X]$, $q \neq 0$. Die Äquivalenzrelation kommt (wie bei $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$) durch das Kürzen oder Erweitern von Brüchen zustande: Sei $f = \frac{p}{q}$ und $g = \frac{r}{s}$ in $K(X)$. Dann ist $f = g$ in $K(X)$
$\Leftrightarrow$ $ps = qr$ in $K[X]$.

Hierbei ist $K[X] \subseteq K(X)$ Teilring mittels $f \mapsto \frac{f}{1}$.
Gleichungen in $K[X]$ kann man daher im Körper $K(X)$ prüfen.
Details zu dieser Konstruktion finden Sie im Vorlesungsskript Henke, Algebra SS2017, Bem 2.18 und Theorem 12.9, Bsp 12.10.

(b) Aus Linearer Algebra I wissen wir:
Sind $A, B \in M_n(K)$, so gilt $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
Wir betrachten nun Matrizen A, B mit Einträgen im Polynomring $K[X]$. Sei $L = K(X)$. Dann ist L nach (a) ein Körper, und es gilt $A, B \in M_n(L)$.
Damit ist nach Linearer Algebra I:
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$
Die Determinantenfunktion für Matrizen mit Einträgen im Polynomring $K[X]$ ist also multiplikativ

2.25 **Bem:** Sei $A \in M_n(K)$ bzw. $T: V \to V$ linear.

(a) Nach 2.17 ist χ_T wohldefiniert.

(b) Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom:

(c) Die Eigenwerte von A bzw T sind genau die Nullstellen von χ_A bzw χ_T.
Aus der Definition der Determinante folgt, daß $\deg \chi_A = n$ bzw $\deg \chi_T = \dim V$.
Also hat A nach 1.24 höchstens n verschiedene Eigenwerte bzw T hat höchstens $\dim(V)$ viele verschiedene Eigenwerte.

(d) Es ist $\chi_A = \chi_{T_A}$ mit $T_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$.

(e) Sei $A \in M_n(K)$ und $m < n$ mit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ für $B \in M_m(K)$, $C \in M_{m \times (n-m)}(K)$, $D \in M_{n-m}(K)$.
Dann ist $\chi_A = \chi_B \cdot \chi_D$, denn

2.26 **Prop**: Das charakteristische Polynom hat die folgende Form:

(a) Sei $A \in M_n(K)$. Dann ist $\deg(\chi_A) = n$ und
$$\chi_A = X^n - Sp(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

(b) Ist $T: V \longrightarrow V$ Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums, dann ist $\deg(\chi_T) = n$ und
$$\chi_T = X^n - Sp(T) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(T).$$

Beweis: Aussage (b) folgt aus Aussage (a), angewandt auf die Darstellungsmatrix von T.
Um Aussage (a) zu beweisen, benutzen wir die Leibnitz Formel. Danach ist jeder Summand von $\det(XI - A)$ ein Produkt von n Faktoren. Diese Faktoren haben entweder die Form $(X - a_{ii})$ oder die Form $-a_{ij}$, mit $i \neq j$. Es gilt:

(i) Unter diesen Summanden kommt X^n genau einmal vor.

(ii) Es gibt genau n Summanden mit Faktor X^{n-1}. Diese enthalten jeweils einen weiteren Faktor a_{ii}, mit $1 \leq i \leq n$. Also ist der Koeffizient von X^{n-1} gerade $Sp(A)$.

(iii) Den konstanten Term von χ_A erhalten wir durch die Berechnung von $\chi_A(0)$:
$$\chi_A(0) = \det(0 \cdot I - A) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det A.$$

2.27 Korollar: ~~Ist~~ $A \in M_n(K)$ mit χ_A zerfällt in Linearfaktoren. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ die Eigenwerte von A (also mit Vielfachheiten der Nullstellen λ_i von χ_A aufgezählt). Dann gilt:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad , \quad Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Analog für $T: V \to V$ Endomorphismus.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

$$\overset{\text{ausmult.}}{=} X^n - \left(\sum \lambda_i X^{n-1}\right) + \dots + (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Mit Prop 2.26 ~~und~~ Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung.

2.28 Thm: (geometrische und algebraische Vielfachheiten)

Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ von $T: V \to V$ gilt:

$\dim \operatorname{Eig}(T, \lambda) \leq$ Vielfachheit der Nullstelle λ vom Polynom χ_T.

Bem: Die Dimension $\dim \operatorname{Eig}(T, \lambda)$ heißt geometrische Vielfachheit von λ; die Vielfachheit der Nullstelle λ von χ_T heißt algebraische Vielfachheit.

Bew: Wähle Basis von $\operatorname{Eig}(T, \lambda) \leq V$ und ergänze zu einer Basis $\mathcal{C}$ von V. Dann ist

$$M_{\mathcal{C}}(T) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \quad \text{mit } m := \dim \operatorname{Eig}(T, \lambda)$$

Mit Bem 2.25 folgt $\chi_T = \chi_A \cdot \chi_{\lambda I_m} = (X - \lambda)^m \cdot \chi_A$.

$\Rightarrow$ $m = \dim \operatorname{Eig}(T, \lambda) \leq$ algebraische Vielfachheit von λ im Polynom χ_T.