Das folgende Resultat ist zentral für die nächsten Beweise:

2-29 Prop: Sei $T: V \to V$ linear. Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ von T.

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r\}$ sind linear unabhängig.

Beweis: Induktion nach r.

Die leere Menge ist nach Definition linear unabhängig. Also ist die Behauptung wahr für $r = 0$.
Da Eigenvektoren ungleich Null sind, ist auch ein einzelner Eigenvektor immer linear unabhängig. Also ist die Behauptung wahr für $r = 1$.

Für den Induktionsschritt sei nun $r \geq 2$, und die Behauptung bewiesen für $\leq r-1$ Eigenvektoren. Seien $\{v_1, \dots, v_r\}$ Eigenvektoren und sei $0 \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$, wobei nicht alle Koeffizienten Null sind.
Ohne Einschränkung sei $\alpha_1 \neq 0$, d.h. es gilt

$$v_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=2}^{r} \alpha_j v_j$$

$$\Rightarrow 0 = T(0) = T\Big(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j\Big) \overset{T \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^{r} \alpha_j T v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \lambda_j v_j = -\alpha_1 \lambda_1 \cdot \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=2}^{r} \alpha_j v_j + \sum_{j=2}^{r} \alpha_j \lambda_j v_j$$

$$= \sum_{j=2}^{r} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_1) v_j$$

Da $\{v_2, \dots, v_r\}$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_2, \dots, \lambda_r$ sind, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden.

$\Rightarrow \alpha_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0 \quad \forall j \geq 2.$

Da λ_j paarweise verschieden ist ______

$\overset{K \text{ Nullteilerfrei}}{\Longrightarrow} \quad \alpha_j = 0$ für $j \geq 2$.

Einsetzen in (*) ergibt $\alpha_1 v_1 = 0$.

Wegen $\alpha_1 \neq 0$ folgt $v_1 = 0$. Widerspruch, denn Eigenvektoren sind ungleich Null.

2.30 Übung: Sei $T: V \to V$ linear, $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie $\{v_1, v_2\}$ ist linear unabhängig
(d.h. rechnen Sie 2.29 nach im Fall $r=2$).

Bevor wir Diagonalisierbarkeit vollständig charakterisieren, benötigen wir als nächstes das Konzept von direkten Summen mehrerer Unterräume eines Vektorraumes.

Wir wiederholen:

2.31 Bem: Sei V ein K-VR mit Unterräumen U_i, $i=1,2$. Dann ist V direkte Summe von U_1 und U_2, also $V = U_1 \oplus U_2$

$\Leftrightarrow$ $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V \ \exists_1 u_i \in U_i,\ i=1,2$ mit $v = u_1 + u_2$.

Wir verallgemeinern:

2.32 Def: Sei V ein K-VR. Die Summe $U_1 + \dots + U_r$ von Unterräumen $U_1, \dots, U_r$ von V ist direkt, genau dann, wenn $\forall v \in V \ \exists_1 u_i \in U_i,\ 1 \le i \le r$, mit $v = u_1 + \dots + u_r$.

Wir schreiben in diesem Fall $U_1 \oplus \dots \oplus U_r = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$ statt $U_1 + \dots + U_r$. Es ist V die direkte Summe der Unterräume $U_1, \dots, U_r$, falls $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$.

2.33 Bsp: Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängige Vektoren in V. Dann ist $V = \bigoplus_{i=1}^{n} K\text{-Span}\{v_i\}$.

Für unsere Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit benötigen wir:

2.34 Prop: (Kriterium für direkte Summe)

Seien V ein K-VR und $U_1, \dots, U_r \le V$.

Dann ist $U_1 + U_2 + \dots + U_r = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$

$$\Leftrightarrow \quad U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j = \{0\}, \quad \forall 1 \le i \le r.$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $U_1 + \dots + U_r = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$ direkte Summe.

Sei $x \in U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j$ für ein i mit $1 \leq i \leq r$.

Dann ist $x \in U_i$ dh. $x = 0 + \dots + 0 + \underset{\uparrow\, i\text{-te Komponente}}{x} + 0 + \dots + 0$ eine Darstellung von x in $\bigoplus_{i=1}^{r} U_i$.

Aber es ist auch $x \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j$. Also ist $x = u_1 + \dots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \dots + u_r$ die Darstellung von x in $\bigoplus_{i=1}^{r} U_i$

~~N~~ Nach Def ist die Darstellung eindeutig. Also ist $x = 0$.

"$\Leftarrow$": Wir wollen zeigen $\sum U_i = \bigoplus U_i$ dh. wir wollen zeigen, jedes $x \in \sum U_i$ läßt sich eindeutig schreiben als $x = u_1 + \dots + u_r$.

Sei also $x \in \sum_{i=1}^{r} U_i$. Angenommen es existieren zwei verschiedene Darstellungen von x,

dh. $x = u_1 + \dots + u_r$ und $x = \tilde{u}_1 + \dots + \tilde{u}_r$ mit $u_i, \tilde{u}_i \in U_i$, $1 \leq i \leq r$. Da $U_1, \dots, U_r$ UR

$$\Rightarrow \quad u_i - \tilde{u}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (\tilde{u}_j - u_j) \in U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j, \quad 1 \leq i \leq r.$$

$$\overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \quad u_i - \tilde{u}_i = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \quad u_i = \tilde{u}_i \quad \forall i$$

dh. x läßt sich eindeutig als direkte Summe von Elementen in $U_1, \dots, U_r$ schreiben.

2.35 Übung: Ist $V = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$, so ist $\dim V = \sum_{i=1}^{r} \dim U_i$.

2.36 __Thm__ (Eigenraumzerlegung)

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte einer Matrix $A \in M_n(K)$ oder einer linearen Abbildung $T: V \to V$. Sei Eig_j der zu λ_j gehörige Eigenraum, $1 \leq j \leq r$. Dann ist

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}_i ,$$

mit $V = K^n$ im Fall der Matrix A.

__Beweis:__

Falls $r=0$ oder $r=1$, dann ist nichts zu zeigen.
Angenommen T hat $r \geq 2$ verschiedene Eigenwerte und die Summe der Eigenräume ist nicht direkt:

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}_i \neq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}_i .$$

$$\overset{2.34}{\Longrightarrow} \exists i \text{ mit } \mathrm{Eig}_i \cap \sum_{j \neq i} \mathrm{Eig}_j \neq \{0\}.$$

$$\Longrightarrow \exists v_i \in \mathrm{Eig}_i \cap \sum_{j \neq i} \mathrm{Eig}_j \text{ mit } v_i \neq 0 .$$

Da $v_i \in \sum_{j \neq i} \mathrm{Eig}_j$, existieren $v_j \in \mathrm{Eig}_j$ mit $0 \neq v_i = \sum_{j \neq i} v_j$

$$\Longrightarrow v_1 + \ldots + v_{i-1} + (-v_i) + v_{i+1} + \ldots + v_r = 0 .$$

Dies ist eine nicht-triviale Linearkombination von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Also sind $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear abhängig. Dies ist ein Widerspruch zu ______

2.37 **Bsp**: (a) Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\chi_C = -x^3 + 3x^2 - 4 = -(X-2)^2(X+1).$$

Es ist $\operatorname{Eig}(C,-1) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\operatorname{Eig}(C,2) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Damit ist die algebraische Vielfachheit der Nullstelle 2 von χ_C zwei, aber die geometrische Vielfachheit von 2 ist eins.

Es ist $\quad K^3 \supsetneq \operatorname{Eig}(C,-1) \oplus \operatorname{Eig}(C,2)$.

(b) Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$\chi_B = \underline{\hspace{5cm}}$

Es ist $\operatorname{Eig}(B, \quad) =$

$\operatorname{Eig}(B, \quad) =$

In diesem Fall gilt:

$K^3 \underline{\hspace{1.5cm}} \operatorname{Eig}(B, \quad) \oplus \operatorname{Eig}(B, \quad)$.

Siehe Beispiel 2.22.

Es gilt also nicht immer Gleichheit in Thm 2.36.
Wann Gleichheit gilt, wollen wir genauer betrachten.

2.38 Thm: (Kriterium für Diagonalisierbarkeit)

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $T: V \to V$ in K. Dann sind äquivalent:

(a) T ist diagonalisierbar;
(b) V besitzt Basis aus Eigenvektoren von T;
(c) $V = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(T, \lambda_i)$
(d) $V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(T, \lambda_i)$
(e) $\dim V = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(T, \lambda_i)$
(f) χ_T zerfällt über K in Linearfaktoren und es gilt $e_i = \dim \mathrm{Eig}(T, \lambda_i)$,
d.h. $\chi_T = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{e_i}$
d.h. algebraische und geometrische Vielfachheit von λ_i stimmen überein, für $1 \le i \le r$.

Beweis:

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Sei T diagonalisierbar
$\overset{2.3}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ Basis B mit $M_B(T)$ Diagonalmatrix
$\Leftrightarrow$ B ist Basis bestehend aus Eigenvektoren.
Letztere Äquivalenz benutzt die Definition der darstellenden Matrix und von Eigenvektoren.

(c) $\Leftrightarrow$ (d): Siehe Thm 2.36.

(d) $\Rightarrow$ (b): Wähle Basis B_i von $\mathrm{Eig}(T, \lambda_i)$, $1 \le i \le r$.
$\Rightarrow B := \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ ist Basis von T, bestehend aus Eigenvektoren.

(b) $\Rightarrow$ (d): Sei $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V, bestehend aus Eigenvektoren
$\Rightarrow V = \mathrm{Span}(B) = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\} \underset{2.21}{\subseteq} \bigoplus \mathrm{Eig}(T, \lambda_i) \underset{2.19}{\subseteq} V$.
Also gilt Gleichheit.

(e) $\Leftrightarrow$ (d): Sei $U := \bigoplus \mathrm{Eig}(T,\lambda_i) \leq V$. Nach Linearer Algebra I gilt $U = V \Leftrightarrow \dim V = \dim U$

$$= \dim \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(T,\lambda_i) \overset{2.35}{=} \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}(T,\lambda_i)$$

(f) $\Rightarrow$ (e): Sei $\chi_T = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{e_i} \in K[X]$. (Dass das charakt. Polynom so aussieht, folgt aus der Voraussetzung, zusammen mit 2.21 und 2.23.)

$$\Rightarrow \dim V \overset{2.26}{=} \deg \chi_T \underset{\text{Gradformel}}{\overset{1.15}{=}} \sum_{i=1}^{r} e_i \overset{\text{Vor}}{=} \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}(T,\lambda_i)$$

(b) $\Rightarrow$ (f): Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis bestehend aus Eigenvektoren von V mit Eigenwerten $\mu_1, \dots, \mu_n$ mit $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Es ist also $Tv_i = \mu_i v_i$, $1 \leq i \leq n$, also

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

$$\xRightarrow[2.16]{2.23} \chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X-\mu_i),$$ d.h. χ_T zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

~~Für~~ einen Eigenwert μ von T gilt:

algebraische Vielfachheit von μ

$= |\{i \mid \mu_i = \mu\}| = \dim \mathrm{Span}\{v_i \mid {\text{EW von } v_i \text{ ist} \atop \mu_i = \mu}\}$

$= \dim \mathrm{Eig}(T,\mu_i) =$ geometrische Vielfachheit von μ.

$\leq$ algebraische Vielfachheit von μ.

Also sind algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten gleich.

2.39 <u>Übung</u>: Berechnen Sie den Ort von Theo Kontrollato aus Beispiel 2.1 nach 100 Minuten, unter Benutzung von Diagonalisierbarkeit.