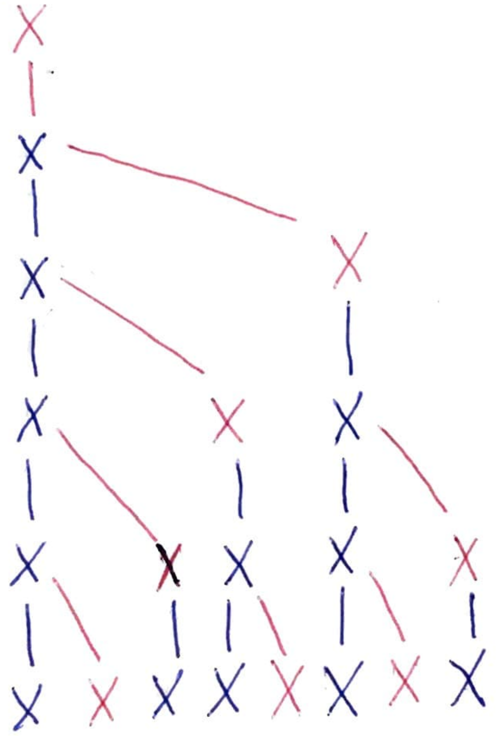
2.40 **Bsp**: Leonardo von Pisa, lebte 1170–1250, auch Fibonacci genannt, stellte in seinem Buch "Libre Abaci" die folgende Aufgabe:

Ein Mann hält ein Kaninchenpaar an einem Ort, der gänzlich von einer Mauer umgeben ist. Wir wollen nun wissen, wie viele Paare von ihnen in einem Jahr gezüchtet werden können, wenn die Natur es so einrichtet, daß diese Kaninchen jeden Monat ein weiteres Paar zur Welt bringen, und damit im zweiten Monat nach ihrer Geburt beginnen.

Wir geben eine Antwort durch ein Bild:



etc.

Was besagt diese Grafik? Wie läßt sich die Antwort zum gestellten Problem ablesen? Was besagt eine Zeile in der Grafik?

2.41 <u>Def</u>: Sei F_n für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch:

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Wir erhalten die Folge von Zahlen:

$0, 1, 1, 2, 3,$ ______________________

2.42 <u>Bsp</u>: Die Fibonacci-Folge in Def 2.41 ist rekursiv definiert. Wie sieht eine explizite Formel für F_n aus?

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \overset{2.41}{=} \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Induktiv folgt für $n \geq 1$ also:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Bem 2.7 wissen wir nun wie man A^n berechnet.
Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(X) =$$

Damit sind die Eigenwerte von A genau:

$\lambda_1 =$ __________ , $\lambda_2 =$ __________ .

Es gilt hierbei $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, mit $\lambda_1 =$ __________ .

Mit 2.38 folgt: A ist diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Matrix $P \in Gl_2(k)$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

und die Matrix P erhalten wir wie folgt:

Damit läßt sich nun F_n bestimmen:

Sei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^n \overset{2.7}{=} (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

mit $P^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Also ist

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Dies zeigt $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - (1-\lambda_1)^n)$ (Binet's Formel)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2.43 Übung:

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$x_{n+1} = -y_n + z_n$$
$$y_{n+1} = -y_n$$
$$z_{n+1} = 2x_n - 2y_n + z_n \,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

mit $x_0 = y_0 = 1$, $z_0 = 2$.