Bem: Wir geben hier einen weiteren Beweis zum Satz von Cayley-Hamilton; dieser wird hier mit den Methoden von Kapitel 2 bzw LA I bewiesen, während wir in Kapitel 3, Satz 3.23, uns der Resultate über Trigonalisierbarkeit von Matrizen bedienen. Alle aus 3.23 resultierenden Ergebnisse, also 3.24 - 3.26 lassen sich dann entsprechend auch hier am Ende von Kapitel 2 beweisen.

2.50 Thm (Satz von Cayley-Hamilton)

Sei $A \in M_n(K)$. Dann ist $\chi_A(A) = 0$.
Insbesondere ist also $\deg m_A \leq n$. (Analog für χ_T bzw m_T.)

Beweis: (Dieser Beweis ist Bonusmaterial dh. nicht Prüfungsrelevant.)

Sei $B := XI_n - A \in M_n(K[X])$ und $\chi_A = \det(B)$.

Laplace Entwicklung aus Linearer Algebra I liefert

$$B \cdot \operatorname{adj}(B) = \det(B) \cdot I_n$$

mit $\operatorname{adj}(B) =: (\tilde{b}_{ij}) \in M_n(K[X])$.

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{b}_{\ell j} \cdot b_{i\ell} \overset{K \text{ Komm.}}{=} \sum_{\ell=1}^{n} b_{i\ell} \cdot \tilde{b}_{\ell j} = (B \cdot \operatorname{adj}(B))_{ij}$$

$$= \begin{cases} \chi_A & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Auf der linken und rechten Seite stehen jeweils Polynome in $K[X]$. Wir setzen A ein:

$$\sum_{\ell=1}^{n} \tilde{f}_{\ell j}(A) \cdot f_{i\ell}(A) = \begin{cases} \chi_A(A) & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Sei e_i der i-te Einheitsvektor, $1 \le i \le n$. Wähle $1 \le j \le n$.

Dann ist
$$\chi_A(A)\, e_j = \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{l=1}^{n} \tilde{f}_{e_j}(A) \cdot f_{il}(A)}_{= \text{0-Matrix für } i \neq j} \Big) \cdot e_i$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_{e_j}(A)\, f_{il}(A)\, e_i$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \tilde{f}_{e_j}(A) \Big(\sum f_{il}(A)\, e_i \Big) \cdot$$

Für $i = l$ ist $f_{ll} = a_{ll} - X$ dh. $f_{ll}(A)\, e_l = a_{ll} e_l - A e_l$

Für $i \neq l$ ist $f_{il} = a_{il}$, also $f_{il}(A)\, e_i = a_{il} \cdot e_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_{il}(A)\, e_i = (a_{ll} e_l - A e_l) + \sum_{i \neq l} a_{il} e_l$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{il} \cdot e_i \Big) - A e_l = 0.$$

$\Rightarrow$ $\chi_A(A)\, e_j = 0$ für alle $1 \le j \le n$.

$\Rightarrow$ $\chi_A(A) = 0$. #

Bem: Wir sehen später einen anderen Beweis dieses Satzes, siehe 3.23.

2.51 Korollar: Sei $A \in M_n(K)$. Dann ist m_A ein Teiler von χ_A, dh. es existiert $q \in K[X]$ mit $m_A \cdot q = \chi_A$.

Analog ist m_T ein Teiler von χ_T.

Wir schreiben kurz: $m_A \mid \chi_A$ bzw $m_T \mid \chi_T$.

2.52 <u>Thm:</u>

Sei $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Dann haben m_T und χ_T dieselben Nullstellen.

<u>Beweis:</u>

(a) Nach 3.23 ist $m_T \mid \chi_T$, also sind die Nullstellen von m_T auch Nullstellen von χ_T.

(b) Umgekehrt, sei λ Nullstelle von χ_T, also $\chi_T(\lambda) = 0$.

$\overset{2.25}{\Rightarrow}$ λ ist Eigenwert von T.

Sei $0 \neq v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

$\Rightarrow 0 \overset{2.46}{=} m_T(T)\, v \overset{2.44}{=} \underbrace{m_T(\lambda)}_{\in K} \cdot v$.

$\overset{v \neq 0}{\Rightarrow} m_T(\lambda) = 0$.

$\Rightarrow \lambda$ ist Nullstelle von m_T.

2.53 <u>Bsp:</u> Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Da B obere Dreiecksmatrix ist, folgt $\chi_B = (X-1)^2 (X-2)^2$.

Mögliche Minimalpolynome m_B sind Teiler von χ_B:

(i) $(x-1)(x-2)$: nein, denn $(A-I)(A-2I) = \ldots \neq 0$.

(ii) $(x-1)^2(x-2)$: nein, analoger Grund.

(iii) $(x-1)(x-2)^2$: ja, denn $(A-I)(A-2I)^2 = 0$.

(iv) $(x-1)^2(x-2)^2$: nein, Grad ist nicht minimal

2.54 <u>Korollar:</u> Sei $A \in M_n(K)$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist diagonalisierbar

(b) Minimalpolynom m_A hat keine mehrfachen Nullstellen, d.h. m_A ist Produkt verschiedener linearer Faktoren.

Beweis:

<u>(a) ⟹ (b):</u> Sei A diagonalisierbar.

Nach 2.38 ist dann $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{n_i}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ paarweise verschieden sind, $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$.

Nach 3.24 ist $m_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq m_i \leq n_i$.

Setze $f := \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)$, $f_i := \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)$

Dann ist

$$f = f_i (X-\lambda_i) = (X-\lambda_i) f_i . \qquad (*)$$

Sei $B \subseteq K^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A. für $v \in B$ gilt: $\exists i$ mit $Av = \lambda_i v$.

$\Rightarrow (A - \lambda_i I_n) v = 0$

$\Rightarrow f(A) \cdot v \overset{(*)}{=} f_i(A) \underbrace{(A - \lambda_i I_n) v}_{=0} = 0$.

Also ist $f(A) \cdot v = 0$ für alle $v \in B$.

$\Rightarrow f(A) = 0$.

Da $\deg f \leq \deg m_A$ und f normiert mit $f(A) = 0$, folgt $m_A = f = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)$.

Also ist m_A Produkt verschiedener linearer Faktoren.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $f = m_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Nach 3.24 und 2.25 sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ genau die verschiedenen Eigenwerte von A. Mit $f_1, \ldots, f_r$ wie im ersten Beweisteil gilt: $f_i(\lambda_i) \neq 0$ und $f_i(\lambda_j) = 0$ für $j \neq i$. Beachte $\deg f_i \leq r-1$, $1 \leq i \leq r$.

1. Beh: Sei $g := f_1(\lambda_1)^{-1} f_1 + \ldots + f_r(\lambda_r)^{-1} f_r$. Dann ist $g = 1$.

Beweis: Da $f_j(\lambda_i) = 0$ ist für $i \neq j$, ist $g(\lambda_i) = 1$, $\forall i$.

$\Rightarrow$ $g - 1 \in K[X]$ mit Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Da $g \neq 0$ und $\deg(g) \leq r-1$, folgt $g - 1 = 0$, dh. $g = 1$.

2. Beh: Definiere $V_j := \{ f_j(A)v \mid v \in K^n \}$. ~~Dann~~ Dann ist $V_j \subseteq \mathrm{Eig}(A, \lambda_j)$

Beweis: ~~Da~~ $f = (X - \lambda_j) \cdot f_j$ mit $f(A) = 0$,

$$\Rightarrow 0 = f(A) \cdot v = (A - \lambda_j I_n) \underbrace{f_j(A) v}_{=: v'}$$

$$\Rightarrow A v' = \lambda_j v' \quad \text{dh. } v' \in \mathrm{Eig}(A, \lambda_j).$$

3. Beh: $K^n = \bigoplus \mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$

Beweis: Sei $v \in K^n$ beliebig. Nach 1. Behauptung ist $g(A) = I_n$

$$\Rightarrow v = I_n v = (f_1(\lambda_1)^{-1} f_1 + \ldots + f_r(\lambda_r)^{-1} f_r)(A) v$$

$$= f_1(\lambda_1)^{-1} f_1(A) v + \ldots + f_r(\lambda_r)^{-1} f_r(A) v$$

$$\overset{\text{2. Beh.}}{\in} \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) + \ldots + \mathrm{Eig}(A, \lambda_r)$$

$$\Rightarrow K^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(A, \lambda_i).$$

Mit Thm 2.38 folgt, daß A diagonalisierbar ist.