§ 3 Trigonalisierbarkeit

In Kapitel 2 haben wir gesehen, daß nicht jeder Endomorphismus $T: V \to V$, nicht jede Matrix $A \in M_n(K)$ diagonalisierbar ist. Um beispielsweise hohe Potenzen von Matrizen zu berechnen, benötigen wir günstige andere Vertreter der Äquivalenzklassen ähnlicher Matrizen. Solche Vertreter sind beispielsweise durch die Jordan-blöcke bzw durch Matrizen in Jordan-Normalform gegeben, speziellen oberen Dreiecksmatrizen.

3.1 __Bsp__: Ein __Jordanblock__ ist eine Matrix der Form

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

für $\lambda \in K$. Für $n=3$ erhalten wir beispielsweise

$$J_3(\lambda)^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$J_3(\lambda)^3 = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

etc.

Bestimmen Sie eine Formel für $J_3(\lambda)^n$ - falls Sie Lust dazu haben.

Eine Matrix in __Jordan-Normalform__ ist eine Blockdiagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_t}(\lambda_t)) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n_t}(\lambda_t)} \end{pmatrix}$$

mit $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$.

Bevor wir beweisen können, daß zumindest für algebraisch abgeschlossene Körper, also z.B. für $K=\mathbb{C}$, jede Äquivalenzklasse eine Matrix in Jordan-Normalform besitzt, müssen wir einige Vorarbeiten leisten. In diesem Kapitel wollen wir

- unser Wissen über Quotienten(vektor)räume wiederholen und vertiefen;
- verstehen, wann Endomorphismen triangularisierbar sind, dh. wann ein Endomorphismus $T: V \to V$ eine darstellende Matrix $M_B(T)$ der Form
$$M_B(T) = \begin{pmatrix} * & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$
hat.

Wir werden sehen, dies passiert genau dann, wenn das charakteristische Polynom χ_T von T in $K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, also χ_T die Form
$$\chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i), \quad \lambda_i \in K.$$
hat, $n = \dim V$. Nach Korollar 1.29 ist also jede Matrix in $M_n(\mathbb{C})$ trigonalisierbar, weil über $\mathbb{C}$ jedes Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Wir wiederholen Quotientenvektorräume aus LA I: (Blatt 13) Aufg. 5

3.2 Bem: Sei V ein K-Vektorraum, $U \leq V$.

Definiere $v_1 \sim v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$ (für $v_1, v_2 \in V$).

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation

(i) reflexiv:

(ii) symmetrisch:

(iii) transitiv:

Die Äquivalenzklassen sind die Mengen

$$
\begin{aligned}
[v] &= \{w \in V \mid w \sim v\} \\
&= \{w \in V \mid w - v \in U\} \\
&= \{w \in V \mid \exists u \in U : \underbrace{w - v = u}_{\text{d.h. } w = v + u}\} \\
&= \{v + u \mid u \in U\} \\
&=: v + U
\end{aligned}
$$

Wir schreiben

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}.$$

Beachte $v + U = v' + U$

$\Leftrightarrow \exists u \in U$ mit $v = v' + u$.

Diese Charakterisierung ist wichtig.

Dies impliziert insbesondere, dass $v + u + U = v + U$ ist, für alle $v \in V$, $u \in U$.

3.3 Thm (Quotientenvektorraum)

Die Menge $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ mit den Operationen

- Addition: $(v+U) + (w+U) := (v+w) + U$
- Skalarmult.: $\lambda \cdot (v+U) := (\lambda v) + U$

für $\lambda \in K$, $v, w \in V$, ist ein K-Vektorraum, genannt Quotientenraum von V modulo U.

Beweis: (Siehe Linear Algebra, Blatt 13, Aufgabe 5)

(a) Wir prüfen, ob Addition und Skalarmultiplikation wohldefiniert sind.

(i) Sei $v + U = v' + U$ für $v, v' \in V$,
$w + U = w' + U$ für $w, w' \in V$.

Dann ex. $u \in U$ mit $v = v' + u$
und es ex. $\tilde{u} \in U$ mit $w = w' + \tilde{u}$.

$$\Rightarrow (v+U) + (w+U) \overset{\text{Def}}{=} v+w+U$$
$$= v' + u + w' + \tilde{u} + U$$
$$= v' + w' + U, \text{ da } u + \tilde{u} \in U$$
$$\overset{\text{Def}}{=} (v'+U) + (w'+U).$$

Also ist Addition wohldefiniert.

(ii) Analog sieht man, daß Skalarmultiplikation wohldefiniert ist.

(b) Die Operationen erfüllen die Vektorraumaxiome. Dies folgt aus den Vektorraumaxiomen von $(V,+,\cdot)$. Beispielsweise:

(V1) Addition ist kommutativ: Seien $v, w \in V$. Dann ist

$$(v+U)+(w+U) \overset{\text{Def}+}{=} (v+w)+U$$
$$\overset{\text{Axiom in } V}{=} (w+v)+U$$
$$\overset{\text{Def}+}{=} (w+U)+(v+U).$$

(V3) Existenz neutrales Element bzgl. Addition:
Sei $v \in V$. Dann ist

$$(v+U)+(0+U) \overset{\text{Def}+}{=} (v+0)+U$$
$$\overset{\text{Axiome in } V}{=} v+U$$

Also ist $0+U$ neutrales Element bzgl $+$.

(V4) Es ist $-v+U$ das additiv Inverse zu $v+U$,

denn:

Etc. Siehe LA I, Blatt 13, Aufgabe 5.

3.4 **Prop:** Sei $\mathcal{E}$ Basis von U.
Sei B Basis von V mit $\mathcal{E} \subseteq B$.

Definiere $\overline{B} := \{e + U \mid e \in B \setminus \mathcal{E}\}$
Dann ist $\overline{B}$ Basis von V/U.

Beweis: Schreibe $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$
$B = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$

(a) **Beh:** $\overline{B}$ erzeugt V/U.
Beweis: Sei $v \in V$. Da B Erzeugendensystem von V ist, existieren $\lambda_i \in K$ mit $v = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k}_{\in U} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$

$$\overset{3.2}{\Longrightarrow} \quad v + U = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n + U$$

$$\underset{\substack{\text{Def} + \\ \text{in } V/U}}{\overset{\text{Def. und}}{=}} \lambda_{k+1}(e_{k+1} + U) + \dots + \lambda_n (e_n + U)$$

$\Longrightarrow$ $\overline{B}$ erzeugt V/U.

(b) **Beh:** $\overline{B}$ ist linear unabhängig.
Bew: Sei $0 + U = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (e_i + U) = \left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) + U$

$\overset{3.2}{\Longrightarrow} \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in U$.

$\Longrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$

$\Longrightarrow 0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k - \lambda_{k+1} e_{k+1} - \dots - \lambda_n e_n$

$\overset{B \text{ lin. unabh.}}{\Longrightarrow}$ $\lambda_i = 0$ für $1 \le i \le n$, also $\overline{B}$ linear unabh.

3.5. Bsp: Der Vektorraum $V = K[X]$ hat die Basis
$B = \{1, X, X^2, \dots\}$.
Sei $U = \{$ geraden Polynome $\}$
$= \{ a_0 X^0 + a_2 X^2 + \dots + a_{2n} X^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K \}$
$\Rightarrow$ U hat Basis $\mathcal{E} = \{1, X^2, X^4, \dots\} \subseteq B$.

$\overset{3.4}{\Rightarrow}$ $\overline{B} = \{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \}$ ist Basis von V/U;

und $V/U \underset{\text{als VR}}{\simeq} \{$ ungeraden Polynome $\}$
$= \{ a_1 X + a_3 X^3 + \dots + a_{2n+1} X^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K \}$.

3.6. Korollar: Sei V endlich-dimensionaler K-VR, $U \leq V$ Unterraum
$\Rightarrow$ $\dim V = \dim U + \dim V/U$.

Beweis: Folgt mit Prop. 3.4.

3.7 Lemma:

Seien V_1, V_2 K-Vektorräume mit $U_1 \leq V_1$, $U_2 \leq V_2$.
Dann ist $\bar{T}: V_1/U_1 \to V_2/U_2$, $v + U_1 \mapsto Tv + U_2$ linear
$\iff T(U_1) \subseteq U_2$.

Beweis:

(a) Wir zeigen $\bar{T}$ ist wohldefiniert $\iff TU_1 \subseteq U_2$.

"$\Rightarrow$": Angenommen $TU_1 \nsubseteq U_2$. Dann ist

$$\left.\begin{array}{l} \bar{T}(0+U_1) \overset{\text{Def }\bar{T}}{=} T(0)+U_2 \overset{T \text{ linear}}{=} 0+U_2 = U_2, \\ \bar{T}(u+U_1) \overset{\text{Def }\bar{T}}{=} T(u)+U_2 \quad \text{für } u \in U_1. \end{array}\right\} \text{Da } TU_1 \nsubseteq U_2$$

$\Rightarrow$ $Tu + U_2 \neq 0 + U_2 = U_2$.

$\Rightarrow$ $\bar{T}(u+U_1) \neq \bar{T}(0+U_1)$

d.h. $\bar{T}$ ist nicht wohldefiniert.

"$\Leftarrow$" Sei $TU_1 \subseteq U_2$. Sei $v + U_1 = \tilde{v} + U_1$ für $v, \tilde{v} \in V$.

$\overset{3.2}{\Longrightarrow}$ $\exists u \in U_1$ mit $v = \tilde{v} + u$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{T}(v+U_1) &\overset{\text{Def }\bar{T}}{=} Tv + U_2 \\ &= T(\tilde{v}+u) + U_2 \\ &\overset{T \text{ linear}}{=} T\tilde{v} + \underbrace{Tu}_{\in U_2 \text{ nach Voraussetzung}} + U_2 \\ &= T\tilde{v} + U_2 \\ &\overset{\text{Def }\bar{T}}{=} \bar{T}(\tilde{v}+U_1). \end{aligned}$$

Also ist $\bar{T}$ wohldefiniert.

(b) Aus der Linearität von T folgt die Linearität von $\bar{T}$.

3.8 Bem:

Seien V_1, V_2 zwei K-Vektorräume mit $U_1 \le V_1$, $U_2 \le V_2$.
Sei $T: V_1 \to V_2$ linear mit $TU_1 \subseteq U_2$.
Sei $B_1 := \{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von V_1, derart, daß
$\{e_1, \dots, e_r\}$ Basis von U_1 ist.
Sei $B_2 := \{f_1, \dots, f_m\}$ Basis von V_2, derart, daß
$\{f_1, \dots, f_s\}$ Basis von U_2 ist.

Nach 3.4 ist dann

$\overline{B}_1 := \{e_{r+1} + U_1, \dots, e_n + U_1\}$ Basis von V_1/U_1,
und $\overline{B}_2 := \{f_{s+1} + U_2, \dots, f_m + U_2\}$ Basis von V_2/U_2.

Sei $M^{B_1}_{B_2}(T) = (a_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 0 & Z \end{array}\right)$ mit geeigneten Matrizen X, Y, Z,

dann ist
$$\begin{aligned} \overline{T}(e_j + U_1) &= Te_j + U_2 \\ &= a_{1j} f_1 + \dots + a_{mj} f_m + U_2 \\ &= a_{s+1,j}(f_{s+1} + U_2) + \dots + a_{mj}(f_m + U_2) \end{aligned}$$

für $r+1 \le j \le n$.

$$\Rightarrow M^{\overline{B}_1}_{\overline{B}_2}(\overline{T}) = Z = \begin{pmatrix} a_{s+1,s+1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,s+1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

3.9. <u>Thm</u> (Isomorphiesatz für Vektorräume)

Sei $T : V \to W$ lineare Abbildung. Dann ist

$$\bar{T} : V/_{\operatorname{Ker} T} \longrightarrow \operatorname{im} T, \quad v + \operatorname{Ker} T \mapsto Tv$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

<u>Beweis:</u> (i) Sei $v = \tilde{v} + u$ für $u \in \operatorname{Ker} T$. Dann ist

$$\bar{T}(v + \operatorname{Ker} T) = Tv = T(\tilde{v} + u) = T\tilde{v} + Tu = T\tilde{v}$$
$$= \bar{T}(\tilde{v} + \operatorname{Ker} T), \text{ dh. } \bar{T} \text{ wohldefiniert.}$$

(ii) Außerdem gilt $\bar{T}(\lambda(v + \operatorname{Ker} T) + (\tilde{v} + \operatorname{Ker} T))$

$$= \bar{T}(\lambda v + \tilde{v} + \operatorname{Ker} T) = T(\lambda v + \tilde{v})$$
$$= \lambda Tv + T\tilde{v}$$
$$= \lambda \bar{T}(v + \operatorname{Ker} T) + \bar{T}(\tilde{v} + \operatorname{Ker} T)$$

für $\lambda \in K$, $v, \tilde{v} \in V$, dh. $\bar{T}$ linear.

(iii) Nach Definition ist $\bar{T}$ surjektiv. Sei weiterhin $0 = \bar{T}(v + \operatorname{Ker} T) = Tv$, dann ist $v \in \operatorname{Ker} T$, also $v + \operatorname{Ker} T = 0 + \operatorname{Ker} T$, also $\bar{T}$ injektiv.

3.10 <u>Korollar</u> (Rank-Defekt-Thm, LA I, 7.16)

Sei $T : V \to W$ linear und $\dim V < \infty$, so gilt $\dim V = r(T) + n(T)$

<u>Beweis:</u> Folgt aus Korollar 3.6 mit $U = \operatorname{Ker} T$ und Thm 3.9.