3.11 **Def:** Sei $T: V \to V$ linear. Ein Unterraum $U \leq V$ heißt T-invariant, falls $TU \subseteq U$ ist.

3.12 **Bem:**
Seien $S, T: V \to V$ linear, $U \leq V$ ein S-invarianter und T-invarianter Unterraum. Dann ist $U$ auch invariant unter der Nullabbildung, der Identitätsabbildung, $\lambda T$ für $\lambda \in K$, $S+T$, $S \circ T$.
Ist also $p \in K[X]$, so gilt $p(T)(U) \subseteq U$, d.h. $U$ ist $p(T)$-invariant.

3.13 **Bsp:**
(a) Sei $\lambda$ ein Eigenwert von Endomorphismus $T: V \to V$. Sei $U := \text{Ker}(T - \lambda id)$. Dann ist $U \leq V$ ein T-invarianter Unterraum: Sei $v \in U = \text{Ker}(T - \lambda id)$. Dann ist $(T - \lambda id)(v) = 0$, also $Tv = \lambda v \in \text{Span}\{v\} \subseteq U$.
Also ist $TU \subseteq U$.

(b) Sei $g \in K[X]$ und $T: V \to V$ linear.
Sei $W := \text{Ker}\, g(T)$; (in (a) ist $g = X - \lambda$).
Sei $w \in W$. Dann ist $g(T)(w) = 0$. Nach 2.44 (c) ist $g(T) \circ T = T \circ g(T)$.
$\Rightarrow g(T)(Tw) = (T \circ g(T))(w) = T(g(T)(w)) = T(0) = 0$
$\Rightarrow Tw \in \text{Ker}\, g(T) = W$
$\Rightarrow W$ ist T-invariant.

**3.14 Bsp:** Nach Bsp 2.37 (a) und Thm 2.38 ist nicht jede Matrix diagonalisierbar. Insbesondere ist

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

nicht diagonalisierbar. Nach 2.37 ist

$$\operatorname{Eig}(C,-1) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\operatorname{Eig}(C,2) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Definiere die Unterräume $W_0 := \{0\}$

$$W_1 = \operatorname{Span}\left\{\overset{=:v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\}$$

$$W_2 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overset{=:v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\}$$

Ergänze $W_2$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $W_3 = K^3$, beispielsweise $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Nach Konstruktion gilt $CW_1 \subseteq W_1$, $CW_2 \subseteq W_2$, und für $T_C : K^3 \to K^3, x \mapsto Cx$ gilt

$$v_1 \longmapsto Cv_1 = -v_1$$

$$v_2 \longmapsto Cv_2 = 2v_2$$

$$v_3 \longmapsto Cv_3 = v_2 + 2v_3$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(T_C) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ ist obere Dreiecksmatrix. (sogar in Jordan-Normalform)

**3.15 Def:**
Endomorphismus $T: V \to V$ heißt <u>trigonalisierbar</u>, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ gibt mit $M_{\mathcal{B}}(T)$ ist obere Dreiecksmatrix.

3.16 Bem: Wir wollen allgemein aufschreiben, was wir im letzten Beispiel gemacht haben.

(a) Seien $\{0\} = W_0 \leq W_1 \leq W_2 \leq \ldots \leq W_n = V$ Unterräume mit

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ W_i \text{ ist } T\text{-invariant} \\ \bullet\ \dim W_i = i \end{array}\right\} 0 \leq i \leq n.$$

(Man nennt dieses Set-up eine vollständige Fahne von $V$.)

(i) Mit dem Basisergänzungssatz wählen wir nun die Basis $\mathcal{B}$ von $V$ wie folgt:

- Wähle Basis von $W_1$. Sie besteht aus einem Vektor $b_1$, da $\dim W_1 = 1$.
- Ergänze $\{b_1\}$ zu Basis von $W_2$. Da $\dim W_2 = 2$, wählen wir also $b_2 \in V$ mit $\{b_1, b_2\}$ Basis von $W_2$.

Etc.

Wir erhalten also eine Basis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ von $W_n = V$ mit

$$\{b_1, \ldots, b_i\} \text{ ist Basis von } W_i,$$

für $1 \leq i \leq n$.

(ii) Sei nun $T: V \to V$ linear. Angenommen es gilt $T(W_i) \subseteq W_i$ für $0 \leq i \leq n$, also $Tw_i \in W_i$, $\forall w_i \in W_i$. Dann gilt:

$Tb_1 \in W_1$, also $Tb_1 = \lambda_{11} b_1$ für $\lambda_{11} \in K$,

$Tb_2 \in W_2$, also $Tb_2 = \lambda_{12} b_1 + \lambda_{22} b_2$ für $\lambda_{12}, \lambda_{22} \in K$,

etc.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots \\ & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \\ & 0 & \lambda_{33} & \\ & & & \ddots \ \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$ ist obere Dreiecksmatrix.

(b) Umgekehrt, sei $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von $V$ mit

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}.$$

Definiere $W_i := \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_i\}$, $1 \leq i \leq n$.
Dann ist $0 =: W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_n = V$ eine vollständige Fahne von $V$.

Die letzte Bemerkung liefert eine erste Charakterisierung von Trigonalisierbarkeit von Endomorphismen. Wir wollen zeigen, daß man Trigonalisierbarkeit eines Endomorphismus $T: V \to V$ an seinem charakteristischen Polynom $\chi_T$ ablesen kann.

Wir benötigen hierfür noch zwei Aussagen über Polynome:

3.17 Lemma:

(a) Seien $q_1, q_2 \in K[X]$ Polynome ohne Nullstelle in $K$.
$\Rightarrow$ $q_1 \cdot q_2 \in K[X]$ hat keine Nullstelle in $K$.

(b) Sei $f = g \cdot h$ für $f, g, h \in K[X]$, mit $f \neq 0$.
Angenommen $f$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren in $K[X]$ (dh. $q \in K^\times$ in Darstellung (*) in 1.23)
$\Rightarrow$ $g, h$ zerfallen vollständig in Linearfaktoren in $K[X]$.

Beweis:

(a) Sei $a \in K$ Nullstelle von $q_1 q_2$.
$\Rightarrow$ $0 = (q_1 q_2)(a) = \underbrace{q_1(a)}_{\in K} \cdot \underbrace{q_2(a)}_{\in K}$.
Da $K$ keine Nullteiler hat (siehe Def 1.12)
$\Rightarrow$ $q_1(a) = 0$ oder $q_2(a) = 0$.
$\Rightarrow$ $a$ ist Nullstelle von $q_1$ oder $q_2$. $\lightning$

(b) Nach Thm 1.23 existieren $f_1, q, g_1, q_1, h_1, q_2 \in K[X]$
mit
$$f = f_1 \cdot q,$$
$$g = g_1 \cdot q_1,$$
$$h = h_1 \cdot q_2,$$
wobei $q, q_1, q_2$ keine Nullstellen in $K$ haben.
$\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $q_1 q_2$ hat keine Nullstelle in $K$.
Nach Voraussetzung ist $q \in K^\times$, also eine Konstante.
Mit der Eindeutigkeitsaussage in Thm 1.23
folgt: $q = q_1 q_2$. Also gilt:
$$0 = \deg(q) = \deg(q_1 q_2) \overset{1.15}{=} \deg(q_1) + \deg(q_2)$$
$\Rightarrow$ $\deg q_1 = \deg q_2 = 0$, dh. $q_1, q_2 \in K^\times$.

3.18 Prop: Sei $T: V \to V$ linear, sei $U \subseteq V$ $T$-invariant.

Dann ist

$$\chi_T(x) = \chi_{T|_U}(x) \cdot \chi_{\overline{T}}(x).$$

mit $T|_U : U \to U$ der Einschränkung von $T$ auf $U$.

Beweis:

Sei $\mathcal{E}$ Basis von $U$.

Ergänze zu Basis $B$ von $V$.

Dann ist $\mathcal{E} \subseteq B$ und **nach** 3.4

ist $\overline{B} := \{v + U \mid v \in B \setminus \mathcal{E}\}$ Basis von $V/U$

mit

$$M_B(T) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{E}}(T|_U) & * \\ \hline 0 & M_{\overline{B}}(\overline{T}) \end{array}\right), \text{ siehe 3.8.}$$

$$\Rightarrow \quad \chi_T(x) = \det\left(M_B(T) - xI\right)$$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{E}}(T|_U) - xI & * \\ \hline 0 & M_{\overline{B}}(\overline{T}) - xI \end{array}\right)$$

$$= \det\left(M_{\mathcal{E}}(T|_U) - xI\right) \cdot \det\left(M_{\overline{B}}(\overline{T}) - xI\right)$$

$$= \chi_{T|_U}(x) \cdot \chi_{\overline{T}}(x).$$

Bem: Eine analoge Gleichung gilt nicht für das Minimalpolynom.

3.19 Thm: Sei $V$ endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum mit $\dim V = n$. Sei $T: V \to V$ linear.
Dann ist $T$ trigonalisierbar
$\iff$ $\chi_T = \prod$ linearer Faktoren
$= \pm (X-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_n)$
mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $T$ trigonalisierbar
$\Rightarrow \exists$ Basis $B$ von $V$ mit $M_B(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\overset{\text{LA I}}{\Rightarrow}$ $\chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$.

"$\Leftarrow$": Induktion nach $n$.
Für $n=1$ ist nichts zu beweisen.
Sei $n > 1$. Dann hat $\chi_T$ eine Nullstelle $\lambda$,
d.h. $\exists v_1 \neq 0$ mit $Tv_1 = \lambda v_1$.
Setze $U := \operatorname{Span}\{v_1\}$. Dann ist $U$ $T$-invariant,
siehe 3.13 (a), und es existiert eine Abbildung

$$\bar{T}: V/U \to V/U,$$ siehe 3.7.

Mit Prop 3.18 folgt

$$\chi_T = \chi_{T|_U} \cdot \chi_{\bar{T}} = (X-\lambda)\, \chi_{\bar{T}}.$$

Lemma 3.17 impliziert: $\chi_{\bar{T}} = \prod$ linearer Faktoren.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Basis

$$\overline{B} := \{v_2 + U, \dots, v_n + U\}$$

mit $M_{\overline{B}}(\overline{T})$ ist obere Dreiecksmatrix.

Setze $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

$$\Rightarrow M_B(T) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{M_{\overline{B}}(\overline{T})} \\ 0 & \end{array}\right)$$ ist obere Dreiecksmatrix.

3.20 <u>Korollar</u>: Ist $A \in M_n(K)$ mit $\chi_A = \prod$ linearer Faktoren

$\Rightarrow \exists\, P \in M_n(K)$ invertierbar mit $P^{-1}AP$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

3.21 <u>Korollar</u>: Jeder Endomorphismus eines endlich-dimensionalen komplexen Vektorraumes ist trigonalisierbar.

Bevor wir Beispiele anschauen, wollen wir weitere Konsequenzen aus Theorem 3.19 anschauen. Dazu benötigen wir:

3.22 <u>Prop</u>: Sei $A$ eine obere Dreiecksmatrix in $M_n(K)$

mit
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(A - \lambda_1 I_n) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_n I_n) = 0$.

<u>Beweis</u>: Sei $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis von $K^n$.
Sei $w \in \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_i\}$. Für $j \leq i$ gilt:
$(A - \lambda_i I_n) \cdot e_j$ = $j$-te Spalte von $A - \lambda_i I_n \in \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$.
$\Rightarrow (A - \lambda_i I_n) w \in \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$.
Für $v \in K^n$ gilt also:

$$\underbrace{(A-\lambda_1 I_n) \cdot \underbrace{\dots \cdot \underbrace{(A-\lambda_{n-1} I_n) \underbrace{(A-\lambda_n I_n) \cdot v}_{\in \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}}}_{\in \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_{n-2}\}}}_{\in \operatorname{Span}\{e_1\}}}_{\in \operatorname{Span}\{0\} = \{0\}} = 0.$$

3.23 <u>Thm</u> (Satz von Cayley-Hamilton)
Sei $T: V \to V$ linear mit $\dim V = n$.
$\Rightarrow \chi_T(T) = 0$. Insbesondere ist $m_T \mid \chi_T$.

<u>Beweis</u>:
Sei $\overline{K}$ der algebraische Abschluß von $K$, also $\overline{K} \supseteq K$.
Dann zerfällt $\chi_T$ in $\overline{K}[X]$ in ein Produkt linearer Faktoren:

$$\chi_T = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n)$$

für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \overline{K}$. Nach Thm 3.19 existiert eine Basis $B$ ~~von~~ $V$ mit $M_B(T)$ ist obere Dreiecksmatrix.
Mit Prop 3.22 folgt $\chi_T(M_B(T)) = 0$, dh. $\chi_T(T)$ ist die Nullabbildung.
Mit Def 2.46 folgt aus $\chi_T(T) = 0$ nun $m_T \mid \chi_T$.

3.24 Thm:

Sei $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraumes $V$. Dann haben $m_T$ und $\chi_T$ dieselben Nullstellen.

Beweis:

(a) Nach 3.23 ist $m_T \mid \chi_T$, also sind die Nullstellen von $m_T$ auch Nullstellen von $\chi_T$.

(b) Umgekehrt, sei $\lambda$ Nullstelle von $\chi_T$, also $\chi_T(\lambda) = 0$.

$\overset{2.25}{\Rightarrow}$ $\lambda$ ist Eigenwert von $T$.

Sei $0 \neq v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$.

$\Rightarrow 0 \overset{2.46}{=} m_T(T)\, v \overset{2.44}{=} \underbrace{m_T(\lambda)}_{\in K} \cdot v$.

$\overset{v \neq 0}{\Rightarrow}$ $m_T(\lambda) = 0$.

$\Rightarrow$ $\lambda$ ist Nullstelle von $m_T$.

3.25 Bsp: Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Da $B$ obere Dreiecksmatrix ist, folgt $\chi_B = (X-1)^2 (X-2)^2$.

Mögliche Minimalpolynome $m_B$ sind nach $\substack{3.24 \\ 3.23}$ Teiler von $\chi_B$:

(i) $(x-1)(x-2)$ : nein, denn $(A-I)(A-2I) = \ldots \neq 0$.

(ii) $(x-1)^2(x-2)$ : nein, analoger Grund.

(iii) $(x-1)(x-2)^2$ : ja, denn $(A-I)(A-2I)^2 = 0$.

(iv) $(x-1)^2(x-2)^2$ : nein, Grad ist nicht minimal

3.26 <u>Korollar</u>: Sei $A \in M_n(K)$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist diagonalisierbar

(b) Minimalpolynom $m_A$ hat keine mehrfachen Nullstellen, d.h. $m_A$ ist Produkt verschiedener linearer Faktoren.

<u>Beweis:</u>

<u>(a) ⟹ (b)</u>: Sei A diagonalisierbar.

Nach 2.38 ist dann $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{n_i}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ paarweise verschieden sind, $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le r$.

Nach 3.24 ist $m_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ und $1 \le m_i \le n_i$.

Setze $f := \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)$, $f_i := \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)$

Dann ist
$$f = f_i (X-\lambda_i) = (X-\lambda_i) f_i . \qquad (*)$$

Sei $B \subseteq K^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A.
für $v \in B$ gilt: $\exists i$ mit $Av = \lambda_i v$.

$\Rightarrow (A - \lambda_i I_n) v = 0$

$\Rightarrow f(A) \cdot v \overset{(*)}{=} f_i(A) \underbrace{(A - \lambda_i I_n) v}_{=0} = 0.$

Also ist $f(A) \cdot v = 0$ für alle $v \in B$.

$\Rightarrow f(A) = 0.$

Da $\deg f \le \deg m_A$ und $f$ normiert mit $f(A) = 0$,
folgt $m_A = f = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)$.

Also ist $m_A$ Produkt verschiedener linearer Faktoren.

(b) ⇒ (a): Sei $f = m_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$. Nach 3.24 und 2.25 sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ genau die verschiedenen Eigenwerte von $A$. Mit $f_1, \dots, f_r$ wie im ersten Beweisteil gilt: $f_i(\lambda_i) \neq 0$ und $f_i(\lambda_j) = 0$ für $j \neq i$. Beachte $\deg f_i \leq r-1$, $1 \leq i \leq r$.

1. Beh: Sei $g := f_1(\lambda_1)^{-1} f_1 + \dots + f_r(\lambda_r)^{-1} f_r$. Dann ist $g = 1$.

Beweis: Da $f_j(\lambda_i) = 0$ ist für $i \neq j$, ist $g(\lambda_i) = 1$, $\forall i$.

$\Rightarrow g - 1 \in K[X]$ mit Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Da $g \neq 0$ und $\deg(g) \leq r-1$, folgt $g - 1 = 0$, d.h. $g = 1$.

2. Beh: Definiere $V_j := \{ f_j(A) v \mid v \in K^n \}$. Dann ist $V_j \subseteq \operatorname{Eig}(A, \lambda_j)$

Beweis: Da $f = (X - \lambda_j) \cdot f_j$ mit $f(A) = 0$,

$$\Rightarrow 0 = f(A) \cdot v = (A - \lambda_j I_n) \underbrace{f_j(A) v}_{=: v'}$$

$$\Rightarrow A v' = \lambda_j v' \quad \text{d.h. } v' \in \operatorname{Eig}(A, \lambda_j).$$

3. Beh: $K^n = \bigoplus \operatorname{Eig}(A, \lambda_i)$

Beweis: Sei $v \in K^n$ beliebig. Nach 1. Behauptung ist $g(A) = I_n$

$$\Rightarrow v = I_n v = \left( f_1(\lambda_1)^{-1} f_1 + \dots + f_r(\lambda_r)^{-1} f_r \right)(A) v$$

$$= f_1(\lambda_1)^{-1} f_1(A) v + \dots + f_r(\lambda_r)^{-1} f_r(A) v$$

$$\overset{\text{2. Beh.}}{\in} \operatorname{Eig}(A, \lambda_1) + \dots + \operatorname{Eig}(A, \lambda_r)$$

$$\Rightarrow K^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Eig}(A, \lambda_i).$$

Mit Thm 2.38 folgt, daß $A$ diagonalisierbar ist.