Die letzten Resultate müssen genauer verstanden werden. Dazu machen wir Beispiele. Die Schwierigkeit besteht darin, den Quotientenraum nicht nur in der Theorie, sondern auch in der Praxis zu verstehen. Theorem 3.19 gibt ein Kriterium, wann eine lineare Abbildung T oder Matrix A trigonalisierbar ist. Der Beweis zu 3.19 ist konstruktiv, d.h. wir erhalten dort die Anweisung, wie wir eine Basis B finden, so daß $M_B(T)$ obere Dreiecksmatrix ist. Wir beginnen mit dem einfachen Fall von (2×2)-Matrizen.

3.27 <u>Bsp</u>:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, unsere Lieblingsmatrix.

(i) Nach Bsp 2.22 ist $\chi_A = X^2 - 2X + 2$, und über $K = \mathbb{C}$ faktorisiert χ_A in Linearfaktoren:

$$\chi_A = (X - (1+i))(X - (1-i)).$$

Dies ist ein Produkt verschiedener Linearfaktoren, Nach 3.24 haben χ_A und m_A dieselben Nullstellen, und $m_A \mid \chi_A$ nach 3.23. Also ist $m_A = \chi_A$. Nach 3.26 ist also A diagonalisierbar, und damit erst recht trigonalisierbar.

(ii) Sei $K = \mathbb{Z}_5$, Körper mit 5 Elementen $\{0,1,2,3,4\}$. Hier ist $\chi_A = X^2 - 2X + 2 = (X-3)(X-4)$. Dies ist ebenfalls ein Produkt verschiedener linearer

Faktoren. Wie in (i) folgt $m_A = \chi_A$, und damit ist A nach 3.26 diagonalisierbar.

(iii) Sei $K = \mathbb{R}$. Dann hat $\chi_A = X^2 - 2X + 2$ keine Nullstellen in $\mathbb{R}$. Das Polynom kann also nicht weiter in ein Produkt von zwei Polynomen g, h kleineren Grades zerlegt werden, ist also irreduzibel: (siehe 1.26)

[Ang. $\chi_A = g \cdot h$ mit $0 \leq \deg g < \deg \chi_A = 2$
$0 \leq \deg h < \deg \chi_A = 2$.

$\overset{1.15}{\Rightarrow}$ $2 = \deg \chi_A = \deg(g) + \deg(h)$

$\Rightarrow$ $\deg g = \deg h = 1$.

$\Rightarrow$ $g = X - a$, für ein $a \in K$,
(beziehungsweise ein lineares Vielfaches)

$\Rightarrow$ χ_A hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ $\lightning$.]

Da $m_A(A) \overset{2.46}{=} 0$ und $m_A \mid \chi_A$ nach 3.23

$\Rightarrow$ $m_A = X^2 - 2X + 2$, kein Produkt linearer Faktoren.

Nach 3.19 ist $A \in M_2(\mathbb{R})$ nicht trigonalisierbar

Nach 3.26 ist $A \in M_2(\mathbb{R})$ nicht diagonalisierbar.

Übungsaufgabe:

Bestimmen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ eine invertierbare Matrix $P \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ mit

$P^{-1} A P$ ist Diagonalmatrix.

(b) Allgemeiner, sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ mit Eigenwert $\lambda \in K$ und zugehörigem Eigenvektor $0 \neq v \in K^2 = V$.
Sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von V.
Zu $v \in V$ existieren also $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.
Ohne große Einschränkung sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann ist nach Steinitz Austauschsatz aus LA I die Menge $\mathcal{B} := \{v, e_2\}$ eine Basis von V mit

$$M_{\mathcal{B}}(T_A) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

für $T_A : V \to V,\ x \mapsto Ax$.
Dies beschreibt, wie eine beliebige 2×2-Matrix mit mindestens einem Eigenwert trigonalisiert wird.

<u>Übungsaufgabe</u>: (Wiederholung)
Beschreiben Sie, wie eine Matrix $P \in M_2(K)$ konstruiert wird, mit P invertierbar, so daß $P^{-1}AP \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(T_A)$ gilt.

3.28 <u>Bsp</u>: Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Nach LA I ist die Determinante der Matrizen $\tilde{A}$ und $\tilde{A}^T$ gleich, also ist $\chi_{A_1} = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-2)^3$.

Es ist also χ_{A_1} Produkt linearer Faktoren. Mit 3.19 folgt, daß $A_1 \in M_3(\mathbb{R})$ trigonalisierbar ist. Wir suchen also eine Basiswechsel-matrix P mit $P^{-1}A_1P$ ist obere Dreiecks-matrix.

(b) Sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$.
Sei $\mathcal{B} := \{e_3, e_2, e_1\}$. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} A_1 e_3 &= 2e_3 \\ A_1 e_2 &= 2e_2 + e_3 \\ A_1 e_1 &= 2e_1 + e_2 \end{aligned}\right\} \text{(wegen } A_1 e_i = i\text{-te Spalte von } A_1\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(T_{A_1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Was ist der Basiswechsel? Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{id} & V & \xrightarrow{T_{A_1}} & V & \xrightarrow{id} & V \\ \mathcal{B} & & \mathcal{E} & & \mathcal{E} & & \mathcal{B}. \end{array}$$

mit Basen

Dann ist

$$M_{\mathcal{B}}(T_{A_1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id)^{-1} \, M_{\mathcal{E}}(T_{A_1}) \, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id)$$

Sei $P := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id)$. Wegen

$$\begin{array}{ccll} \text{Basis } \mathcal{B} & \xrightarrow{id} & \text{Basis } \mathcal{E} & \\ e_3 & \longmapsto & e_3 = & 3.\ \text{Basisvektor von } \mathcal{E} \\ e_2 & \longmapsto & e_2 = & 2.\ \text{—''—} \\ e_1 & \longmapsto & e_1 = & 1.\ \text{—''—} \end{array}$$

folgt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) = P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id)$.

Also ist $P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_3(2)$.

3.29 Bsp: Sei $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Schreibe $T = T_A$.

Dann ist $\chi_A = \chi_{T_A} = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$
$= (x+1)(x-2)^3$.

Nach 3.19 ist A trigonalisierbar.

Beweis von 3.19 sagt:

(1)(a) Wähle Eigenvektor zum Eigenwert -1:

Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $Av_1 = $ 4. Spalte von A – 2. Spalte von A

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot v_1$.

$\Rightarrow v_1$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$.

(b) Setze $U := \mathrm{Span}\{v_1\} \leq \mathbb{R}^4 =: V$.

Benötigen Basis von V/U mittels Prop 3.4:

Es ist $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ Standardbasis von V.

Steinitz Austauschsatz liefert:

$$\mathcal{B} := \{v_1, e_1, e_2, e_3\}$$

ist Basis von $V = \mathbb{R}^4$. Nach 3.4 ist

$$\overline{\mathcal{B}} := \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$$

eine Basis von V/U, mit $\bar{e}_i := e_i + U$, $1 \leq i \leq 3$.

(c) Es ist $\bar{T}(\bar{e}_1) \overset{3.7}{=} T(e_1) + U \overset{\text{Def } T}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + U$

$\overset{3.2}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in U} + U$

$\overset{3.3}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U = 2(e_1 + U) + 1\cdot(e_2 + U)$.

Außerdem ist

$$\bar{T}(\bar{e}_2) = Te_2 + U = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U = 2(e_2+U) + 1\cdot(e_3+U)$$

$$\bar{T}(\bar{e}_3) = Te_3 + U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + U = 2(e_3+U).$$

$$\Rightarrow \quad M_{\bar{B}}(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A_1, \text{ siehe Bsp. } 3.28$$

(2) Jetzt müssen wir A_1 trigonalisieren. Benutze Bsp 3.28
Es ist für $\bar{C} := \{\bar{e}_3, \bar{e}_2, \bar{e}_1\}$ mit $\bar{e}_i := e_i + U$, $1 \le i \le 3$ die zugehörige Matrix $M_{\bar{C}}(\bar{T})$ obere Dreiecksmatrix.

Wähle $C = \{v_1, e_3, e_2, e_1\}$. Dann ist

$$Tv_1 = -v_1$$
$$Te_3 = 2e_3$$
$$Te_2 = 2e_2 + e_3$$
$$Te_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3)\,v_1 + e_2 + 2e_1$$

$$\Rightarrow \quad M_C(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Übung</u>: Ist Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$ diagonalisierbar?
(Benutzen Sie 3.26.)

Das nächste Beispiel ist das wichtigste.

3.30 Bsp: Sei $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y+3z \\ -x-z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$.

Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ ist dann

$$M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

und damit $\chi_T = \pm (X-2)^3$. Nach Thm 3.19 ist T also trigonalisierbar. Der Beweis zu 3.19 erklärt, wie man letzteres durchführt. Schreibe $V = \mathbb{R}^3$.

1. Schritt: Bestimme Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 2$. Ein solcher ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Setze $U := \mathrm{Span}\{v_1\}$.

2. Schritt: Benötigen Basis von V/U: Da $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$ (Standardbasis), folgt mit Steinitz Austauschlemma, daß auch $\mathcal{B} = \{v_1, e_2, e_3\}$ Basis von V ist. Nach Prop 3.4 ist $\overline{\mathcal{B}} = \{e_2 + U, e_3 + U\}$ Basis von V/U.

3. Schritt: Wir benötigen die darstellende Matrix $M_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{T})$ mit $\overline{T}: V/U \to V/U$, definiert wie in 3.7; hierzu müssen wir nach LA I die Bilder der Basisvektoren aus $\overline{\mathcal{B}}$ $\overline{T}(e_2+U)$ und $\overline{T}(e_3+U)$ als Linearkombination in $\overline{\mathcal{B}}$ schreiben: Es ist

(a) $\overline{T}(e_2+U) \overset{\mathrm{Def}\,\overline{T}}{=} T(e_2) + U \overset{\mathrm{Def}\,T}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + U$ } Hier wird $\overline{T}(e_2+U)$ berechnet.

Hier wird $\overline{T}(e_2+U)$ in der Basis $\overline{\mathcal{B}}$ ausgedrückt.

$$\overset{\text{rechne in } V}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + U$$

$$\overset{3.3}{=} \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + U}_{\in U}\Big] + \Big[\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + U\Big] \overset{3.2}{=} (\overset{\text{Nullelement von } V/U}{\widetilde{0 + U}}) + \Big[\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + U\Big]$$

$$\overset{3.3}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + U \overset{3.3}{=} 4(e_2+U) - 2(e_3+U).$$

Wenn Sie Schwierigkeiten mit dieser letzten Rechnung haben, wiederholen Sie sehr sorgfältig die Lerneinheit zum Quotientenraum Kapitel 3.1. Der 2. Teil der letzten Rechnung ist hier durch intuitives Sehen gelöst worden. Das kann man häufig so machen; man kann aber auch mit Mitteln der LA I dies gezielt ausrechnen:

Sei $\bar{v} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + U$, $\bar{e}_2 = e_2 + U$, $\bar{e}_3 = e_3 + U$.

Gegeben ist Vektor $\bar{v} \in V/U$. Es ist $\bar{B} = \{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ Basis von V/U und wir suchen $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\bar{v} = \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3$.

Hierzu müssen wir ein lineares Gleichungssystem lösen, d.h. es ist ein Standardproblem aus LA I:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + U &= \lambda_2 (e_2 + U) + \lambda_3 (e_3 + U) \\ &\overset{3.3}{=} \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + U \\ &= \begin{pmatrix}0\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} + U . \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 3.2 suchen wir also $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}4\\-\lambda_2\\2-\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} \in U = \mathrm{Span}\{v_1\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Gesucht sind also $\lambda_2, \lambda_3, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}4\\-\lambda_2\\2-\lambda_3\end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Es folgt $\mu = 4$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$.

Also ist $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + U = 4(e_2 + U) - 2(e_3 + U)$

bzw $\qquad \bar{v} = 4\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$.

(b) In Analogie zur letzten Rechnung berechnen wir noch:

$$\bar T(e_3+U) = Te_3 + U = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + U$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in U} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + U$$

$$\overset{3.2(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + U = 2 \cdot (e_2 + U) .$$

Die darstellende Matrix ist

$$M_{\bar B}(\bar T) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \chi_{\bar T} = (X-2)^2$$
(siehe 3.18)

4. Schritt:

Nach Beweis von Thm 3.19 müssen wir nun die Matrix $M_{\bar B}(\bar T)$ trigonalisieren. (Angefangen haben wir mit einer 3×3-Matrix; jetzt müssen wir das Problem "nur noch" für eine 2×2-Matrix lösen.)

Koordinatenvektor von Eigenvektor $\bar v_2$ von $\bar T$

• Es ist $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ist der Vektor

$$\bar v_2 := 1 \cdot (e_2 + U) + (-1)\, e_3 + U = e_2 - e_3 + U$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Das reicht bereits, siehe Bsp 3.27(b)

Resultat: Wähle $B = \{v_1, e_2 - e_3, e_3\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$

Dann ist
$$T v_1 = 2 v_1$$
$$T(e_2 - e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = v_1 + 2(e_2 - e_3)$$
$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3v_1 + 2(e_2 - e_3) + 2e_3$$

Es folgt $M_B(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Damit haben wir Abb. T trigonalisiert.