§4 Jordan-Normalform

Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.
Wie in Bem 2.12 erklärt, suchen wir nach einem
besonders schönen Vertreter der Äquivalenzklassen
dieser Äquivalenzrelation. In Kapitel 2 haben wir
gesehen, wann eine solche Äquivalenzklasse eine
Diagonalmatrix enthält. In Kapitel 3 haben wir
Äquivalenzklassen untersucht, die keine Diagonal-
matrix enthalten. Wir haben gelernt, daß über
einem algebraisch abgeschlossenen Körper (wie zB.
$K = \mathbb{C}$) jede Äquivalenzklasse Vertreter enthält,
die obere Dreiecksmatrizen sind. Um aber hohe
Potenzen von Matrizen zu berechnen, wie im
2. Kapitel erklärt, reicht dies noch nicht.
Wir wollen in diesem Kapitel sehen, daß über
einem algebraisch abgeschlossenen Körper jede
dieser Äquivalenzklassen einen Vertreter in
Jordan-Normalform besitzt, also von der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n_t}(\lambda_t)} \end{pmatrix}, \text{ siehe 3.1.}$$

Um dies zu zeigen, müssen wir verstehen für $T: V \to V$ linear:
- Die Zerlegung von V in Haupträume
- nilpotente lineare Abbildungen

4.1 **Prop:** Sei $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes. Sei $f \in K[X]$ mit $f = a \cdot b$ wobei $ggt(a,b) = 1$ und $f(T) = 0$.
$\Rightarrow V = \mathrm{Ker}(a(T)) \oplus \ker(b(T))$ ist eine direkte Summenzerlegung von V in T-invariante Unterräume.

Beweis:

(a) Nach Voraussetzung ist $ggt(a,b) = 1$. Nach Aufgabe 1.1 Bezout's lemma für Polynome existieren Polynome $s, t \in K[X]$ mit $x^0 = 1 = as + bt$.
Wie in 2.44 setzen wir T in die Polynome ein.
Dann ist
$$id_V = T^0 = (as+bt)(T) = a(T)\cdot s(T) + b(T)\cdot t(T)$$
Dies linearen Abbildungen können wir auf einen Vektor $v \in V$ anwenden:
$$v = id_V(v) = \big(a(T)\cdot s(T) + b(T)\cdot t(T)\big)(v) \qquad (*)$$
$$= \underbrace{a(T)\,s(T)\,v} + \underbrace{b(T)\,t(T)\,v}$$

(i) Hierbei ist:

- $b(T)\left[a(T)\,s(T)v\right] \overset{2.44}{=} \underbrace{a(T)(b(T)}(s(T)v)$

Sei $Tv = \lambda v$
$f(Tv) = f(\lambda)v$

$$= \underbrace{f(T)}_{=0}\,s(T)v \overset{Vor}{=} 0$$

- $a(T)\left[b(T)\,t(T)v\right] = \underbrace{a(T)\,b(T)}\,t(T)v$
$$= \underbrace{f(T)}_{=0}\,t(T)v \overset{Vor.}{=} 0$$

Gleichung (*) sagt also: $V \subseteq \operatorname{Ker} b(T) + \operatorname{Ker} a(T)$.
Da $\operatorname{Ker} b(T), \operatorname{Ker} a(T) \leq V$ folgt Gleichheit.
(Beachte $a(T), b(T): V \to V$ linear.)

(ii) Sei $v \in \operatorname{Ker} a(T) \cap \operatorname{Ker} b(T)$.

$\Rightarrow v \in \operatorname{Ker} a(T)$ und $v \in \operatorname{Ker} b(T)$: $a(T)v = 0$, $b(T)v = 0$.

$$\Rightarrow a(T)s(T)v \overset{2.44(c)}{=} s(T)\underbrace{a(T)v}_{=0} = 0,$$

$$b(T)t(T)v \overset{2.44(c)}{=} t(T)\underbrace{b(T)v}_{=0} = 0,$$

Mit (*) folgt $v = 0 + 0 = 0$, also gilt:

$$V = \operatorname{Ker} a(T) \oplus \operatorname{Ker} b(T).$$

(b) Wir zeigen $\operatorname{Ker} a(T)$ ist T-invariant:

Sei $v \in \operatorname{Ker} a(T)$.

$$\Rightarrow a(T)(Tv) \overset{2.44}{=} T \cdot \underbrace{a(T)v}_{=0} = T(0) \overset{T \text{ linear}}{=} 0.$$

$\Rightarrow Tv \in \operatorname{Ker} a(T)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} a(T)$ ist T-invariant.

Analog ist $\operatorname{Ker} b(T)$ ein T-invarianter Unterraum.

□

Wir setzen die Proposition 4.1 fort: Hierzu sei

$$T_a := T|_{\mathrm{Ker}\, a(T)} \quad \text{und} \quad T_b := T|_{\mathrm{Ker}\, b(T)}.$$

Beachte, da nach 4.1 die Unterräume Ker $a(T)$ und Ker $b(T)$ jeweils T-invariant sind,

d.h. T_a: Ker $a(T) \longrightarrow$ Ker $a(T)$
T_b: Ker $b(T) \longrightarrow$ Ker $b(T)$ } sind Endomorphismen. mit $T_a(x) = Tx$, $T_b(x) = Tx$ für geeignete x.

4.2 Prop: (Fortsetzung von 4.1)

Sei $f = m_T$ das Minimalpolynom von T in 4.1

Sei m_{T_a} das Minimalpolynom von T_a,

m_{T_b} —— " —— T_b.

$\Longrightarrow m_{T_a} = a$ und $m_{T_b} = b$.

Beweis:

(a) In Prop 4.1 gilt $f = a \cdot b$ mit $a, b \in K[X]$, $\mathrm{ggt}(a,b) = 1$. Es sind also a und b Polynome; nach 2.44 ist mit $T: V \longrightarrow V$ linear, damit auch $a(T): T \longrightarrow T$ linear. Ist $x \in$ Ker $a(T)$, so gilt $a(T)(x) = 0$; da Ker $a(T)$ T-invariant, ist Ker $a(T)$ auch $a(T)$-invariant, und damit ist $a(T)|_{\mathrm{Ker}\, a(T)}$: Ker $a(T) \longrightarrow$ Ker $a(T)$ die Nullabbildung.

$\overset{2.46}{\Longrightarrow} m_{T_a} \mid a$. Analog gilt $m_{T_b} \mid b$.

Insbesondere ist nach 1.15 $\deg m_{T_a} \leq \deg a$ und $\deg m_{T_b} \leq \deg b$.

(b) Da $V = \ker a(T) \oplus \ker b(T)$

$\Rightarrow \exists_1 \left.\begin{array}{l} v_a \in \ker a(T) \\ v_b \in \ker b(T) \end{array}\right\}$ mit $v = v_a + v_b$.

$$\Rightarrow \underbrace{(m_{T_a} \cdot m_{T_b})}_{\text{lineare Abb.}}(T)(v) \overset{2.44}{=} (m_{T_a}(T) \cdot m_{T_b}(T))(v)$$

$$= (m_{T_a}(T) \cdot m_{T_b}(T))(v_a + v_b)$$

$$= m_{T_a}(T)\, m_{T_b}(T) v_a + m_{T_a}(T) \underbrace{m_{T_b}(T) v_b}_{=0}$$

da $m_{T_b}(T_b) = 0$

$$= m_{T_a}(T)\, m_{T_b}(T) v_a$$

$$= m_{T_b}(T) \underbrace{m_{T_a}(T) v_a}_{=0}, \text{ da } m_{T_a}(T_a) = 0.$$

$$= 0 \quad \forall v \in V.$$

$\Rightarrow m_{T_a} m_{T_b}(T) = 0$

Da $f = m_T$ Minimalpolynom von T

$\overset{2.46}{\Longrightarrow} \quad ab = f \mid m_{T_a} m_{T_b}$

Wir haben also:

$$\deg a + \deg b \overset{1.15}{=} \deg(f) = \deg(m_T)$$

$$\leq \deg(m_{T_a} m_{T_b})$$

$$\overset{1.15}{=} \deg m_{T_a} + \deg m_{T_b}$$

$$\overset{(a)}{\leq} \deg a + \deg b$$

Also gilt überall Gleichheit, dh. insbesondere ist $m_{T_a} = a$ und $m_{T_b} = b$.

$\square$

4.3 Thm (Hauptraumzerlegung)

Sei $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V mit Minimalpolynom $m_T = f_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{m_r}$, wobei $f_1, \ldots, f_r \in K[X]$ paarweise verschiedene irreduzible (siehe 1.26, 1.27) Polynome sind.

Setze $W_i := \operatorname{Ker} f_i(T)^{m_i}$, $1 \leq i \leq r$.

Dann ist

(a) W_i T-invarianter Unterraum von V,

(b) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$ (W_i heißen Haupträume von T)

(c) $m_{(T|W_i)} = f_i^{m_i}$

Beweis: Setze $a := f_1 \cdot \ldots \cdot f_{r-1}$, $b = f_r$.
Benutze 4.1 und 4.2 und mache Induktion nach r.

4.4 Bemerkung: Benutze die Notation von Thm 4.3.
Wir zeigen später – nach der Klassifikation der JNF – noch:
Es ist $m_T = f_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{m_r}$ mit $m_i > 0$.
$\Leftrightarrow$ $\chi_T = f_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{n_r}$ mit $n_i \geq m_i$.

Mit diesem Resultat folgt dann aus 3.19:
Sei $T: V \to V$ linear. Dann sind äquivalent:

(a) T trigonalisierbar

(b) χ_T faktorisiert als Produkt linearer Faktoren

(c) m_T ——— " ———.

4.5 Bsp:

Sei $P: V \to V$ linear mit $P^2 = P$, d.h. P ist eine Projektion. Dann ist $0 = P^2 - P = P(P - I)$.
Also erfüllt P das Polynom $f = X(X-1)$.
Nach 2.46 ist $m_P \mid X(X-1)$.
$\Rightarrow m_P \in \{X, X-1, X(X-1)\}$.

(a) Sei $m_P = X$. Dann ist $0 \overset{2.46}{=} m_P(P) = P$,
d.h. P ist die Nullabbildung.

(b) Sei $m_P = X-1$. Dann ist $0 = P - I$, also $P = I$,
d.h. P ist die Identitätsabbildung.

(c) Sei $m_P = X(X-1)$.
Die Nullstellen von m_P entsprechen nach $\overset{2.25}{3.24}$
genau den Eigenwerten von P
$\Rightarrow$ P hat Eigenwerte 0 und 1.
Die Hauptraumzerlegung von V ist

$$V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P - I)$$
$$= \mathrm{Eig}(P, 0) \oplus \mathrm{Eig}(P, 1),$$

und sie entspricht der Zerlegung in Eigenräume.
Nach 2.38 existiert Basis $\mathcal{B}$ von V mit

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

mit Matrizen geeigneter Größen.