Sei $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Um die Existenz der Jordan-Normalform zu beweisen, müssen wir noch nilpotente lineare Abbildungen verstehen.

4.6 Def: Endomorphismus $T: V \to V$ heißt <u>nilpotent</u> falls es $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $T^m = 0$. Matrix $A \in M_n(K)$ heißt <u>nilpotent</u>, falls es $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^m = 0$.

4.7 Bsp:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 14 & 7 & -7 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 14 & 7 & -7 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 14 & 7 & -7 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Matrix $J_n(0) \in M_n(K)$ ist nilpotent:

$$J_n^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Nebendiagonale 2. Nebendiagonale

Induktiv folgt:

$$J_n^{n-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_n^n(0) = 0.$$

Da $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von $J_n(0)$ ist, ist $\chi_{J_n(0)} = X^n$.
Nach 3.23 ist $m_{J_n(0)} \mid \chi_{J_n(0)}$, Also $m_{J_n(0)} = X^t$, $t \leq n$.

Diese Rechnung zeigt daher auch, daß $t=n$ ist, d.h. das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom vom Jordanblock $J := J_n(0) \in M_n(K)$ stimmen überein:

$$\chi_J = m_J = X^n.$$

(c) Ähnlich zur Rechnung in (b) folgt auch, daß jede strikte obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix ist.

4.8 <u>Bem</u>:

Es ist T nilpotent mit $T^n = 0$

$\iff M_B(T)^n = M_B(T^n) = 0$

$\iff M_B(T)$ ist nilpotent mit $M_B(T)^n = 0$.

4.9 <u>Bsp</u>: Sei $T: V \to V$ linear, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V.

Angenommen $M_B(T) = J_n(0)$. Nach 4.7 ist also $M_B(T)$ nilpotent, nach 4.8 ist T nilpotent.

Für die Basisvektoren gilt nach Definition der darstellenden Matrix:

$$\begin{aligned} Tv_1 &= 0 \\ Tv_2 &= v_1 \\ Tv_3 &= v_2 \\ &\vdots \\ Tv_{n-1} &= v_{n-2} \\ Tv_n &= v_{n-1}. \end{aligned}$$

Setze $v := v_n$. Dann ist also

$$\begin{aligned} v_{n-1} &= Tv \\ v_{n-2} &= Tv_{n-1} = T^2 v \\ &\vdots \\ v_2 &= T^{n-2} v \\ v_1 &= T^{n-1} v \end{aligned}$$

$\Rightarrow B = \{T^{n-1}v, T^{n-2}v, \dots, Tv, v\}$ mit $T^n v = 0$.

Beachte: $\mathrm{Eig}(T, 0) = \mathrm{Span}\{v\}$ bzw $\mathrm{Eig}(J_n(0), 0) = \mathrm{Span}\{e_1\}$.

4.10 Bem: Wir zeigen im folgenden, daß jede lineare Abbildung $T: V \to V$ mit $T^m = 0$ eine darstellende Matrix hat, die durch Jordanblöcke $J_{n_1}(0), \ldots, J_{n_t}(0)$ gegeben ist mit

$$M_B(T) = \operatorname{diag}(J_{n_1}(0), \ldots, J_{n_t}(0)).$$

Dies zu verstehen, ist der Schlüssel zum Beweis der Existenz der Jordan-Normalform für lineare Abbildungen $T: V \to V$, falls χ_T zerfällt in $K[X]$.

Bevor wir mit dem komplizierteren Beweis beginnen, hier noch ein wichtiges Argument aus LA I, welches wir verwenden um Thm 4.13 zu beweisen:

4.11 Bem:

(a) Ist $S: U \to W$ linear und $\{Su_1, \ldots, Su_t\} \subseteq W$ linear unabhängig, so ist $\{u_1, \ldots, u_t\} \subseteq U$ linear unabhängig. Wir wenden dieses Argument auf die natürliche Projektion $\pi: U \to U/W$, $u \mapsto u+W$ an, mit $W \leq U$ Unterraum:
Ist $\overline{B} := \{u_1+W, \ldots, u_t+W\} \subseteq U/W$ linear unabhängig.
$\Rightarrow B := \{u_1, \ldots, u_t\} \subseteq U$ ist linear unabhängig.

(b) Im Beweisteil (c) von 4.13 benutzen wir ohne weitere Erklärung folgende Notation bezüglich der natürlichen Projektion π:
- Wir heben eine Menge $\overline{B} \subseteq U/W$ zu einer Menge $B \subseteq U$ an; dies bedeutet wir wählen zu allen $u+W \in \overline{B}$ ein Urbild u unter π.
- Umgekehrt, ist $B \subseteq U$, so schreiben wir $\overline{B}$ für die Menge $\overline{B} := \{u+W \mid u \in B\}$.

4.12 __Lemma:__ Sei $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V mit T nilpotent. Dann existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $m_T = X^m$ und es gilt

$$0 \underset{\neq}{\leq} \operatorname{Ker} T \underset{\neq}{\leq} \operatorname{Ker} T^2 \underset{\neq}{\leq} \dots \underset{\neq}{\leq} \operatorname{Ker} T^m = V.$$

__Beweis:__ (a) Da T nilpotent ist, existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $T^m = 0$. Nach 2.46 gilt also $m_T \mid X^m$, und die erste Behauptung ist bewiesen. Da $T^m = 0$ ist, gilt außerdem $\operatorname{Ker} T^m = V$.

(b) Angenommen $x \in \operatorname{Ker} T^i$ für $i \geq 1$.

$\Rightarrow T^i(x) = 0$

$\Rightarrow T^{i+1}(x) = T(T^i x) = T(0) = 0$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} T^{i+1}$

Also ist $\operatorname{Ker} T^i \leq \operatorname{Ker} T^{i+1}$ für $i \geq 1$.

Wir haben also

$$0 \leq \operatorname{Ker} T \leq \operatorname{Ker} T^2 \leq \dots \leq \operatorname{Ker} T^m = V.$$

(c) Angenommen für ein $i \geq 0$ gilt $\operatorname{Ker} T^i = \operatorname{Ker} T^{i+1}$, wobei $T^0 = id$, also $\operatorname{Ker} T^0 = \{0\}$ ist.

Sei $x \in \operatorname{Ker} T^{i+2}$. Dann ist

$$0 = T^{i+2} x = T^{i+1}(Tx),$$

also ist $Tx \in \operatorname{Ker} T^{i+1} = \operatorname{Ker} T^i$

$\Rightarrow 0 = T^i(Tx) = T^{i+1}(x)$, d.h. $x \in \operatorname{Ker} T^{i+1}$.

$\overset{(b)}{\Rightarrow} \operatorname{Ker} T^{i+2} = \operatorname{Ker} T^{i+1}$ und induktiv folgt, daß $\operatorname{Ker} T^i = \operatorname{Ker} T^{i+1} = \dots = \operatorname{Ker} T^m = V$.

Wählen wir m minimal mit $T^m = 0$, so folgt also $i = m$. #

Hier jetzt das zentrale Resultat zu nilpotenten Abbildungen:

4.13 **Thm:** Sei $T: V \to V$ nilpotent und $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $T^m = 0$. Dann ist das Minimalpolynom $m_T = X^m$, und es existiert eine Basis B von V mit

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } * \in \{0,1\}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(0)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{n_2}(0)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n_t}(0)} \end{pmatrix}$$

mit $J_{n_i}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n_i}(K)$.

Beweis: (a) Nach Lemma 4.12 ist

$$0 < \ker T < \ker T^2 < \ldots < \ker T^{m-1} < \ker T^m = V.$$

Wähle Basis B_1 von $\ker T$, ergänze durch B_2 zu einer Basis von $\ker T^2$, ergänze durch B_3 zu einer Basis von $\ker T^3$ etc. Nach Prop 3.4 existieren also Mengen $B_i \subseteq V$ mit

$$\overline{B}_i := \{ w + \ker T^{i-1} \mid w_i \in B_i \}$$

ist Basis von $\ker T^i / \ker T^{i-1}$, $i \geq 1$, und die Menge $B := \bigcup_{i \geq 1} B_i$ ist Basis von V.

(b) Bem: $\{ Tw + \operatorname{Ker} T^{i-1} \mid w \in B_{i+1} \} \subseteq \operatorname{Ker} T^i / \operatorname{Ker} T^{i-1}$

ist linear unabhängig. Insbesondere folgt mit LA I, daß $\{ Tw \mid w \in B_{i+1} \}$ linear unabhängig ist in $\operatorname{Ker} T^i$.

Beweis: Sei $B_{i+1} = \{ w_s \mid s \in I \} \subseteq \operatorname{Ker} T^{i+1}$.

Angenommen $0 + \operatorname{Ker} T^{i-1} = \sum_{s \in I} \lambda_s \, (Tw_s + \operatorname{Ker} T^{i-1})$

für $\lambda_s \in K$. Dann ist

$$0 + \operatorname{Ker} T^{i-1} \overset{3.3}{=} \left(\sum \lambda_s T w_s\right) + \operatorname{Ker} T^{i-1}$$

$$\overset{T \text{ linear}}{=} T\left(\sum \lambda_s w_s\right) + \operatorname{Ker} T^{i-1}$$

$\overset{3.2}{\Rightarrow} T\left(\sum \lambda_s w_s\right) \in \operatorname{Ker} T^{i-1}$

$\Rightarrow 0 = T^{i-1}\left(T\left(\sum \lambda_s w_s\right)\right) = T^i\left(\sum \lambda_s w_s\right).$

$\Rightarrow \sum \lambda_s w_s \in \operatorname{Ker} T^i$ mit $w_s \in B_{i+1} \subseteq B$.

Da $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_i$ Basis von $\operatorname{Ker} T^i$ und $B = \bigcup_{j \geq 1} B_j$ Basis von V, nach Konstruktion

$\Rightarrow \lambda_s = 0 \;\; \forall s \in I$, und die 1. Behauptung ist gezeigt.

Die 2. Behauptung folgt mit Bem 4.11(a).

(c) (i) Betrachte Basis $\overline{\mathcal{B}}_m$ von $\operatorname{Ker} T^m / \operatorname{Ker} T^{m-1}$

Setze $\overline{\mathcal{E}}_m = \overline{\mathcal{B}}_m = \overline{\mathcal{C}}_m$.

Hebe $\overline{\mathcal{C}}_m$ zu einer Menge $\mathcal{C}_m \subseteq \operatorname{Ker} T^m$.

Nach LA I ist $\mathcal{C}_m \subseteq \operatorname{Ker} T^m$ linear unabhängig.

Es ist $T(\mathcal{C}_m) \subseteq \operatorname{Ker} T^{m-1}$.

Nach (b) ist $\{T(\mathcal{C}_m) + \operatorname{Ker} T^{m-2}\} \subseteq \operatorname{Ker} T^{m-1} / \operatorname{Ker} T^{m-2}$

linear unabhängig.

Nach Konstruktion in (a) ist $\overline{\mathcal{B}}_{m-1}$ Basis von $\operatorname{Ker} T^{m-1} / \operatorname{Ker} T^{m-2}$. Nach Steinitz Austauschsatz existieren Vektoren $\overline{\mathcal{E}}_{m-1} \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{m-1}$ derart, daß

$$\{T(\mathcal{C}_m) + \operatorname{Ker} T^{m-2}\} \cup \overline{\mathcal{E}}_{m-1} =: \overline{\mathcal{C}}_{m-1}$$

eine Basis von $\operatorname{Ker} T^{m-1} / \operatorname{Ker} T^{m-2}$ ist.

(ii) Fahre induktiv fort mit den Mengen $\overline{\mathcal{E}}_{m-1}$, $\overline{\mathcal{B}}_{m-1}$ und $\overline{\mathcal{C}}_{m-1}$, dh. Index m wird im nächsten Schritt durch $m-1$ ersetzt.

Induktiv existieren damit Mengen $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{B}_i$, derart, daß für $\mathcal{C}_i := \mathcal{E}_i \cup T(\mathcal{C}_{i+1})$ die Menge $\overline{\mathcal{C}}_i = \{x + \operatorname{Ker} T^{i-1} \mid x \in \mathcal{C}_i\}$ Basis von $\operatorname{Ker} T^i / \operatorname{Ker} T^{i-1}$ ist. Nach Konstruktion ist

$$\mathcal{C} := \bigcup \mathcal{C}_i \overset{\text{umsortieren}}{=} \bigcup_{w \in \mathcal{E}_m} \{T^{m-1}w, T^{m-2}w, \dots, Tw, w\} \cup \dots \cup \bigcup_{w \in \mathcal{E}_1} \{w\}$$

eine Basis von V.

Nach Bem 4.10 (b) ist dann die darstellende Matrix von T bezüglich $\mathcal{C}$ von der gewünschten Form:

$$M_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(0)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{n_2}(0)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n_k}(0)} \end{pmatrix}$$

4.14 <u>Bsp</u>: Sei $T = T_A : K^3 \to K^3$, $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 14 & 7 & -7 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Da A nilpotent nach Bsp 4.8 und $A = M_{\mathcal{E}}(T_A)$ mit $\mathcal{E}$ Standardbasis von K^4, folgt aus 4.10, daß $T = T_A$ nilpotent ist.
Wegen $A \neq 0$ und $A^2 = 0$, folgt $m_A = X^2$, siehe 2.46. Mit Lemma 4.12 gilt:

$$0 < \operatorname{Ker} A < \operatorname{Ker} A^2 = K^3$$

mit $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} T_A$, $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} T_A^2$.

Mit LA I berechnen wir den Kern $\operatorname{Ker} A$.

Es ist also $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\operatorname{Ker} A$.
Ergänze durch $\mathcal{B}_2 := \{e_3\}$ zu einer Basis von $\operatorname{Ker} A^2 = K^3$.

(b) Der Beweis von Thm 4.13 liefert die Strategie aus den in (a) berechneten Daten eine Jordan-Basis zu konstruieren:

Wähle $B_2 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{E}_2 = \{e_3\}$.

Dabei ist $\{Ae_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \operatorname{Ker} A$.

Es ist $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von Ker A.

Mit Steinitz Austauschsatz folgt, daß die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ Ae_3, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von Ker A ist, beziehungsweise

$$\mathcal{C} := \{e_3\} \cup \left\{ Ae_3, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{umsortieren}}{=} \{Ae_3, e_3\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis von K^3 ist.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{J_2(0)} & 0 \\ 0 & \boxed{J_1(0)} \end{pmatrix}.$$

4.15 **Korollar**: Sei $T: V \longrightarrow V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V mit Minimalpolynom $m_T = (X-\lambda)^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Basis B von V mit

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$ Blockdiagonalmatrix

mit $J_i = \lambda I_{n_i} + J_{n_i}(0) = J_{n_i}(\lambda)$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$ Jordanblock zum Eigenwert λ der Größe $n_i \times n_i$, $1 \leq i \leq s$.

__Beweis__: Nach Def 2.46 ist m minimal mit $(T-\lambda I)^m = 0$. Setze $S := T - \lambda\,\mathrm{id}$. Dann ist S nilpotent mit $m_S = X^m$. Nach Thm 4.13 existiert eine Basis B

mit $$M_B(T-\lambda\,\mathrm{id}) = M_B(S) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{n_s}(0)} \end{pmatrix}$$ Blockdiagonalmatrix

$$\Rightarrow M_B(T) \overset{LAI}{=} M_B(S) + M_B(\lambda\,\mathrm{id})$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{n_s}(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

□

Zusammen mit der Hauptraumzerlegung 4.3 folgt damit:

4.16 **Thm:** (Jordan-Normalform, zerfallende Fall)
Sei K Körper, $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Angenommen das charakteristische Polynom χ_T zerfällt über $K[X]$ in Linearfaktoren, dann existiert eine Basis B von V mit

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{n_t}(\lambda_t)} \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_t}(\lambda_t)) =: J,$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ und $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$ mit $\dim V = \sum_{i=1}^{t} n_i$.
Wir nennen J die zu T gehörige Jordan ~~Norm~~ Normalform.

4.17 **Bem:** Die in 4.16 konstruierte Basis B
(a) Wir nennen die in 4.16 konstruierte Basis B eine Jordan-Basis zur linearen Abbildung T.
Die Matrizen $J_{n_i}(\lambda_i) \in M_{n_i}(K)$ sind $n_i \times n_i$-Matrizen.
Die Matrizen $J_{n_i}(\lambda_i)$ heißt die Länge des Jordan-Blockes $J_{n_i}(\lambda_i)$.
Die Zahl n_i heißt die Länge des Jordan-Blocks $J_{n_i}(\lambda_i)$.
Die Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ sind genau die Eigenwerte von T; sie sind nicht notwendigerweise verschieden.
(b) Ganz analog zu 4.16 gilt für $A \in M_n(K)$, falls $\chi_A \in K[X]$ vollständig in $K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, daß es eine invertierbare Matrix P gibt mit $P^{-1}AP = J$.
Wir nennen J die zu A gehörige Jordan-Normalform.
(c) Ist in 4.16 der Körper K algebraisch abgeschlossen, so zerfällt jedes Polynom vollständig in $K[X]$ in Linearfaktoren.
Insbesondere hat also jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine zu A gehörende Jordan-Normalform.