4.18 <u>Bsp</u>: Wir fangen mit einem einfachen Beispiel an.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-16 & -25 \\ 9 & x+14 \end{pmatrix}$$

$$= (x-16)(x+14) + 25 \cdot 9$$

$$= x^2 - 2x - 16 \cdot 14 + 25 \cdot 9$$

$$= x^2 - 2x - 224 + 225$$

$$= (x-1)^2$$

Es ist also $(A-I)^2 = 0$, aber $A - I \neq 0$,

d.h. $B := A - I$ ist nilpotent mit $m_B = X^2$.

(b) Wir konstruieren wie im Beweis zu Thm 4.13 angegeben den Basiswechsel:

Es ist $B = A - I = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}$.

Es ist $\ker B$ eindimensional mit $\ker B = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}\}$,

denn:

$$Bx = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 25 & 0 \\ -9 & -15 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 25 & 0 \\ -15 & -25 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} t, \ t \in K.$$

Wir haben also

$$0 < \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}\} = \ker B < \ker B^2 = K^2.$$

Wähle $\left(B_1 = \{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}\}\right)$, $B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

$\Rightarrow \{B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}\} \subseteq \ker B$, und $\mathcal{C} := \{\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

ist Basis von K^2 mit $M_{\mathcal{C}}(T_B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2(0)$.

Basisvektor aus B_1 spielt keine Rolle, er wurde gegen $B\binom{1}{0}$ ausgetauscht.

(c) Da $B = A - I$, ist $A = B + I$.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{C}}(T_A) = M_{\mathcal{C}}(T_B) + M_{\mathcal{C}}(T_I)$$
$$= M_{\mathcal{C}}(T_B) + M_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_2(1).$$

Basiswechsel ist durch die Abbildung

$$K^2_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{id}} K^2_{\mathcal{E}} \xrightarrow{T_A} K^2_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\mathrm{id}} K^2_{\mathcal{C}}$$

beschrieben. Es gilt nach LA I also

für $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$: $\quad P^{-1}AP = J_2(1)$.

Test: $P^{-1}AP = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 16 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_2(1).$$

4.19 Bsp: Sei $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $x \mapsto Ax$

mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Es ist $\chi_T = \det(xI - A)$

$$= \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-3)(x-1)(x-2) + 1 + (x-3)$$

$$= (x-3)(x^2-3x+2) + x - 2$$

$$= x^3 + x^2(-3-3) + x(2+9+1) + (-6-2)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Binomischer Lehrsatz $= (x-2)^3$

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

Da $m_T \mid \chi_T$ und $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow m_T = (x-2)^3$.

(b) Setze $S := T - 2\,\mathrm{id}$. Dann ist $S^3 = 0$, also S nilpotent mit $m_S = x^3$. Wir berechnen $\ker S$ und $\ker S^2$, und finden:

$$0 < \ker S < \ker S^2 < \ker S^3 = \mathbb{R}^3.$$

Details: $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Also $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

und $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Wir haben also $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Span}\{v_1\}$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} S^2 = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$ mit $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wähle Mengen B_i im Beweis von 4.13:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 < & \operatorname{Ker} S & < & \operatorname{Ker} S^2 & < & \operatorname{Ker} S^3 = \mathbb{R}^3 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & B_1 = \{v_1\} & & B_2 = \{v_2\} & & B_3 = \{e_3\} \end{array}$$

denn $\{v_1\}$ ist Basis von $\operatorname{Ker} S$

$\{v_1, v_2\}$ — " — $\operatorname{Ker} S^2$

$\{v_1, v_2, e_3\}$ — " — $\operatorname{Ker} S^3 = \mathbb{R}^3$.

Der Beweis zu 4.13 sagt jetzt: $\mathcal{C} := \{S^2 e_3, S e_3, e_3\}$ ist linear unabhängig, und da $|\mathcal{C}| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, ist $\mathcal{C}$ Basis von $\mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$M_{\mathcal{C}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{denn} \quad \begin{array}{l} S^2 e_3 \xmapsto{S} 0 \\ S e_3 \longmapsto S^2 e_3 \\ e_3 \longmapsto S e_3 \end{array}.$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{C}}(T) = M_{\mathcal{C}}(S) + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_3(2).$$

Der Basiswechsel ist durch das Bild

$$\underset{\mathcal{C}}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{\mathcal{C}}{\mathbb{R}^3}$$

beschrieben. Setze $P := M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id})$.

Dann gilt $P^{-1} A P = J_3(2)$. Die Berechnung der Matrix P ist dem Leser überlassen.

Welche Information enthalten das charakteristische Polynom χ_T und das Minimalpolynom m_T über die zu T gehörige Jordan-Normalform? Es gilt:

4.20 Korollar:

(a) Die algebraische Vielfachheit von λ in χ_T entspricht der Summe der Längen der Jordanblöcke zum Eigenwert λ.

(b) Die geometrische Vielfachheit von λ entspricht der Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ.

(c) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von m_T ist die maximal vorkommende Länge eines Jordanblockes zum Eigenwert λ.

4.21 Bsp:

Sei $A \in M_3(K)$ mit $\chi_A = (X-c)^2(X-d)$ für $c \neq d$ in K.
Es gibt zwei Fälle, siehe 3.23/3.24:

(a) Es ist $m_A = (X-c)(X-d)$.
$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.
$\Rightarrow$ JNF von A ist $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

(b) Es ist $m_A = (X-c)^2(X-d) = \chi_A$.
Nach Korollar 4.20 hat A einen zugehörige Jordan-Normalform mit $J_2(c)$ und $J_1(d)$.
Es folgt die JNF von A hat die Form

$$\begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

4.22 Beweis von Korollar 4.20 (a) und (b):

(1) Wähle Basis B von V. Sei $A := M_B(T)$
Sei $P \in GL_n(K)$. Dann ist $P^{-1}AP = M_{B'}(T)$
für eine Basis B' von V. Es gilt insbesondere:

(a) $\chi_A = \chi_{P^{-1}AP}$: siehe

(b) $m_A = m_{P^{-1}AP}$:

Da $0 = m_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP) = P^{-1}\, m_{P^{-1}AP}(A)\, P$

$\Rightarrow m_{P^{-1}AP}(A) = 0$, dh. $m_A \mid m_{P^{-1}AP}$.

Da $m_A(P^{-1}AP) = P^{-1} m_A(A) P = P^{-1} 0 P = 0$

$\Rightarrow m_{P^{-1}AP} \mid m_A$. Da m_A und $m_{P^{-1}AP}$ normiert sind

$\Rightarrow m_A = m_{P^{-1}AP}$.

(c) Es ist $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$
$\Leftrightarrow Av = \lambda v$
$\Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}v) = \lambda (P^{-1}v)$
$\Leftrightarrow P^{-1}v \in \mathrm{Eig}(P^{-1}AP, \lambda)$.

Es folgt also, daß die in den drei Aussagen betrachteten numerischen Werte von A und $P^{-1}AP$ übereinstimmen. Wir beweisen die Aussagen daher, in dem wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Aussagen für eine Matrix A in Jordan-Normalform zeigen. Sei also

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n_t}(\lambda_t)} \end{pmatrix}$$

(2) Wir beweisen die ersten beiden Aussagen.

(a) Da A obere Dreiecksmatrix, folgt aus LAI:

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{t} (X-\lambda_i)^{n_i}.$$

Hierbei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ nicht notwendigerweise paarweise verschieden. Sortiere gleiche Faktoren $(X-\lambda)$ zusammen, dann folgt die Behauptung.

(b) Da A eine Matrix in Blockdiagonalgestalt ist, folgt

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) \simeq \bigoplus_{\lambda_i=\lambda} \mathrm{Eig}(J_{n_i}(\lambda_i))$$

Wie in Beispiel 4.9 folgt: $\dim \mathrm{Eig}(J_{n_i}(\lambda_i)) = 1$, für alle i mit $\lambda_i = \lambda$.

$\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda) = \#$ der Jordanblöcke von A mit Eigenwert λ.

$\square$

Die dritte Aussage zum Minimalpolynom und der zugehörigen Jordan-Normalform schauen wir uns separat an. Zunächst eine Bemerkung:

4.23 Bem: Sei $f \in K[X]$ und $C := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_n(K)$ Matrix in Blockgestalt.

$\Rightarrow f(C) = \begin{pmatrix} f(A) & * \\ 0 & f(D) \end{pmatrix}$, und falls $B=0$ ist, so gilt $f(C) = \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(D) \end{pmatrix}$. Die Behauptung folgt durch Induktion und wegen $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \underset{\text{LAI}}{=} \begin{pmatrix} AA' & AB'+BD' \\ 0 & DD' \end{pmatrix}$.

4.24 Bem.: (a) Die Matrizen A und $P^{-1}AP$ für $P \in GL_n(K)$, und $A \in M_n(K)$ haben dasselbe Minimalpolynom:

Es ist $m_A(P^{-1}AP) = P^{-1} m_A(A) P \underset{2.46}{=} P^{-1} 0 P = 0$

$\overset{2.46}{\Rightarrow} m_{P^{-1}AP} \mid m_A$

Außerdem ist $0 = m_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP) = P^{-1} m_{P^{-1}AP}(A) P$ $\quad | \cdot P$ von links bzw P^{-1} von rechts

$\Rightarrow m_{P^{-1}AP}(A) = 0$

$\overset{2.46}{\Rightarrow} m_A \mid m_{P^{-1}AP}$

Da m_A und $m_{P^{-1}AP}$ normiert sind, folgt $m_A = m_{P^{-1}AP}$.

(b) Sei $J = \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_t}(\lambda_t))$ in Jordan-Normalform. Dann läßt sich das Minimalpolynom ablesen: Es ist

$$m_J = \prod_{\lambda \in E} (X-\lambda)^{n_\lambda}$$

wobei $E := \{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } J\}$

und $n_\lambda := \max\{n_i \mid \lambda_i = \lambda\}$. Dies beweist Kor. 4.20 (c).

Beweis:

(i) Es ist $0 \overset{2.46}{=} m_J(J) \overset{4.23}{=} \begin{pmatrix} \boxed{m_J(J_{n_1}(\lambda_1))} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{m_J(J_{n_t}(\lambda_t))} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_J(J_{n_i}(\lambda_i)) = 0$.

$\overset{2.46}{\Rightarrow} m_{J_{n_i}(\lambda_i)} \mid m_J$, mit $m_{J_{n_i}(\lambda_i)} \overset{\text{wie 4.7}}{=} (X-\lambda_i)^{n_i}$

Setze $f := \prod_{\lambda \in E} (X-\lambda)^{n_\lambda}$.

Da $n_i \le n_\lambda$ nach Definition und $\operatorname{ggT}(m_{J_{n_i}(\lambda_i)}, m_{J_{n_j}(\lambda_j)}) = 1$ ist für $\lambda_i \neq \lambda_j$, folgt $f \mid m_J$.

(ii) Nach 4.23 gilt andererseits:

$$f(J) = \begin{pmatrix} \boxed{f(J_{n_1}(\lambda_1))} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{f(J_{n_t}(\lambda_t))} \end{pmatrix}$$

wobei $f(J_{n_i}(\lambda_i)) \overset{2.44}{=} \prod_{\mu \neq \lambda} (J_{n_i}(\lambda_i) - \mu I)^{n_\mu} \cdot \underbrace{(J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^{n_\lambda}}_{=0} = 0,$

da $n_i \leq n_\lambda$ und $m_{J_{n_i}(\lambda_i)} = (X - \lambda_i)^{n_i}$.

$\Rightarrow f(J) = 0.$

$\overset{2.46}{\Longrightarrow} m_J \mid f.$

Da f und m_J normiert sind, folgt mit (i), daß gilt $f = m_J$.

Korollar 4.20 sagt also etwas über die Größe des größten vorkommenden Jordanblockes $J_n(\lambda)$ aus. Wieviele Jordanblöcke $J_t(\lambda)$, mit $t \in \mathbb{N}$, $t \leq n$, kommen aber sonst vor? Hierzu sagt etwas der Beweis von 4.13 aus.

4.25 Korollar: In der Situation einer linearen Abbildung $T: V \to V$ mit $m_T = (X-\lambda)^m$ für $m \in \mathbb{N}$ aus Korollar 4.15 gilt:

Jordanblöcke $J_t(\lambda)$, also der Größe $t \times t$

$= |B_t| - |B_{t+1}|$ (Notation aus 4.13)

$= 2 \dim \operatorname{Ker}(T-\lambda id)^t - \dim \operatorname{Ker}(T-\lambda id)^{t-1} - \dim \operatorname{Ker}(T-\lambda id)^{t+1}$.

Beweis:

Der Beweis zu Thm 4.13 liefert ein Verfahren um Jordan-Basen zu finden. Sei $S := T - \lambda id$. Dann ist S nilpotent. Sei m minimal mit $S^m = 0$. Im Beweis von Thm 4.13 wählen wir Mengen B_i mit $B = \bigcup_{i=1}^m B_i$ ist Basis von V, und arbeiten dann rückwärts, beginnend bei B_m: Sei $B_m = \{v_{m,1}, v_{m,2}, \dots, v_{m,j_m}\}$.

1. Schritt: Es ist

$$0 \overset{B_1}{<} \operatorname{Ker} S \overset{B_2}{<} \operatorname{Ker} S^2 < \dots \overset{B_{m-1}}{<} \operatorname{Ker} S^{m-1} \overset{B_m}{<} \operatorname{Ker} S^m = V$$

liefert Basen zu $J_m(0)$ bzw $J_m(\lambda)$

$$\begin{array}{ccccc}
S^{m-1} v_{m,1} & S^{m-2} v_{m,1} & \dots & S v_{m,1} & v_{m,1} \\
S^{m-1} v_{m,2} & S^{m-2} v_{m,2} & \dots & S v_{m,2} & v_{m,2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
S^{m-1} v_{m,j_m} & S^{m-2} v_{m,j_m} & \dots & S v_{m,j} & v_{m,j_m}
\end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{cccc}
S^{m-2} v_{m-1,1} & S^{m-3} v_{m-1,1} & & v_{m-1,1} \\
S^{m-2} v_{m-1,2} & S^{m-3} v_{m-1,2} & & v_{m-1,2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
S^{m-2} v_{m-1,j_{m-1}} & S^{m-3} v_{m-1,j_{m-1}} & & v_{m-1,j_{m-1}}
\end{array}$$

liefert Basen zu $J_{m-1}(0)$ bzw $J_{m-1}(\lambda)$.

Etc.
Nicht in jedem Schritt müssen neue Vektoren $v_{i,k}$ hinzukommen, wie wir in Beispiel 4.18 gesehen haben. Wir erhalten: # Jordanblöcke $J_t(\lambda)$

$= |B_t| - |B_{t-1}|$. mit $|B_i| = \dim(\operatorname{Ker} S^i) - \dim \operatorname{Ker}(S^{i-1})$.

Einsetzen ergibt die Behauptung.

$\square$

Aus der Jordan-Normalform einer Matrix oder einer linearen Abbildung T lassen sich ablesen -
- das charakteristische Polynom χ_T, siehe 4.20(a)
- das Minimalpolynom m_T, siehe 4.24.

Wir entnehmen der Ergebnisse nochmals: Zerfällt χ_T über dem zugrunde liegenden Körper K vollständig in Linearfaktoren, so haben χ_T und m_T dieselben Nullstellen. Was passiert im Allgemeinen Fall?

4.26 <u>Thm</u>: Sei $A \in M_n(K)$. Dann ist $\chi_A \mid (m_A)^n$.

<u>Beweis</u>: Sei $m \in \mathbb{N}$ maximal mit $B := \{I, A, A^2, \dots, A^m\}$ ist linear unabhängig. Sei R der K-Vektorraum mit Basis B, also $R = \mathrm{Span}_K(B)$. Dann ist $R \leq M_n(K)$ mit Matrixmultiplikation ein Teilring, also $(R, +, \cdot)$ mit Matrixmultiplikation ist ein kommutativer Ring mit Eins I_n. (linear erweitert) ist ein kommutativer Ring mit Eins I_n.

Nach 3.23 ist $m_A(A) = 0$.

$\Rightarrow$ $m_A \cdot I_n \in R[X]$ hat Nullstelle $A \in R$.

$\overset{1.17/1.21}{\Longrightarrow}$ $\exists\, q \in R[X]$ mit $m_A \cdot I_n = (XI_n - A) \cdot q$. $\quad (*)$

(Hierbei benutzen wir, daß nach den Übungen 1.17 auch über Ringen R gilt, so länge das Polynom g in 1.17 einen Leitkoeffizienten in $R^\times$ hat.)

Gleichung $(*)$ ist eine Matrizengleichung mit Elementen aus $M_n(K[X])$. Wir benutzen 2.24(b). Wende die Determinante auf $(*)$ an. Dann folgt: $(m_A)^n = \chi_A \cdot \det q$, mit $\det q \in K[X]$.

4.27 <u>Korollar</u>: Sei K Körper, $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Dann gilt:

$m_T = f_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{m_r}$ mit $m_i > 0$, $f_i \in K[X]$ irreduzibel

$\Longleftrightarrow$ $\chi_T = f_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{n_r}$ mit $n_i \geq m_i$.