§ 5 Dualräume

Sei K ein Körper. In diesem Kapitel betrachten wir eine wichtige Dualität zwischen Vektorräumen und linearen Abbildungen. Wir wiederholen zunächst:

5.1 **Bem:** Seien V, W zwei K-Vektorräume. Dann ist die Menge

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{T : V \to W \mid T \text{ linear}\}$$

ein K-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplikation definiert durch

$$(S+T)(v) := S(v) + T(v),$$

$$(\lambda T)(v) := \lambda \cdot T(v),$$

für alle $v \in V$, $S, T \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\lambda \in K$.

Wir betrachten in diesem Kapitel einen Spezialfall:

5.2 **Def:** Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$$

ein K-Vektorraum, genannt *Dualraum von V*, bzw. der zu V *duale Vektorraum*. Die Elemente $\varphi \in V^*$ heißen *Linearformen* oder *lineare Funktionale*. (Wir wählen also $W = K$, d.h. betrachten K als einen K-Vektorraum.)

5.3 **Bsp:**

(a) Sei $V = K^n$, $n \geq 1$. Definiere

$$f_j : K^n \longrightarrow K, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_j ;$$ (Koordinatenabbildung)

dann ist f_j linear, also $f_j \in V^*$.

Allgemeiner, seien $a_1, \dots, a_n \in K$ fest gewählt.
Dann ist $\varphi : K^n \longrightarrow K, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$

eine lineare Abbildung, denn

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ (Matrixprodukt),

also φ ist Multiplikation mit der $(1 \times n)$- Matrix $(a_1, \dots, a_n)$. Also ist $\varphi \in V^*$. Es gilt außerdem

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j ,$$

dh. $\varphi \in \operatorname{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n) \subseteq V^*$.

(b) Sei $V = M_{n \times n}(K) = M_n(K)$. Dann ist

$$\operatorname{tr} : V \longrightarrow K , A \longmapsto \operatorname{Spur}(A) = \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} ,$$

mit $A = (a_{ij})$, eine lineare Abbildung.
Es ist $\operatorname{Spur}(A+B) = \operatorname{Spur}(A) + \operatorname{Spur}(B)$
$\operatorname{Spur}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Spur}(A)$.
Also ist tr eine lineare Abbildung, dh. $\operatorname{tr} \in V^*$.

(c) Sei $V = K[X]$ und sei $a \in K$ fest gewählt.
Die Abbildungen

$$ev_a : K[X] \longrightarrow K, \quad f \longmapsto f(a)$$

oder

$$ev_a \circ d : K[X] \longrightarrow K, \quad f \longmapsto f'(a)$$

mit f' = 1. Ableitung von f
sind lineare Abbildungen, also Elemente in V^*.

Betrachten wir die Basis $\{1, X, X^2, \dots\}$ von $K[X]$, so können wir definieren

$$\varphi_i : K[X] \longrightarrow K \qquad \text{(Koordinaten-)abbildung}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_j X^j \longmapsto a_i$$

Dann sind die φ_i linear, also $\varphi_i \in V^*$.

(d) Sei $V = \mathcal{C}([0,1])$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$.
Sei $a \in [0,1]$ fest gewählt. Dann ist

$$ev_a : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(a)$$

linear, also $ev_a \in V^*$. Aus Analysis wissen wir

$$I : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$$

ist linear, denn

$$\int_0^1 (\lambda f + g)(t)\,dt = \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))\,dt$$
$$= \lambda \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 g(t)\,dt .$$

Also ist $I \in V^*$.

(e) Sei V der Vektorraum aller endlichen Folgen

$$\{(a_1, a_2, \cdots) \mid \text{nur endlich viele } a_i \neq 0\}.$$

Sei $\underline{b} := (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unendliche Folge. Dann ist

$$\underline{b} : V \longrightarrow K, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \underline{b}((a_1, a_2, \dots)) := \sum_{i \geq 0} a_i b_i$$

wohldefiniert und linear, dh. $\underline{b} \in V^*$.

Es gibt also viele verschiedene Beispiele, die uns schon begegnet sind.

Wir zeigen, wie man für V^* eine Basis konstruiert, falls V endlich-dimensional ist. Wir imitieren Koordinatenabbildungen:

5.4 Prop (a) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $B := \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V. Der Dualraum V^* hat die Basis $B^* := \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ mit

$$e_i^*(e_j) := \left\{\begin{matrix} 1 & \text{falls } i=j, \\ 0 & \text{sonst}, \end{matrix}\right\}, \quad 1 \le i,j \le n.$$

[Wir definieren das Kronecker-delta durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Es ist also $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, für $1 \le i,j \le n$.]

B^* heißt die zu B <u>duale Basis</u>.

(b) Die lineare Abbildung $V \to V^*$, $e_i \mapsto e_i^*$, $1 \le i \le n$, ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist also $\dim V^* = \dim V$.

<u>Beweis</u>:

(i) Aus Linearer Algebra I wissen wir: Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V und $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$, dann existiert genau eine lineare Abbildg $T: V \to W$ mit $T(v_i) = w_i$, für $1 \le i \le n$. Wird hierbei Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ auf eine Basis $\{w_1, \dots, w_n\}$ von W abgebildet, so handelt es sich um einen Isomorphismus. Dies zeigt Behauptung (b).

(ii) Nach (i) existieren die Abbildungen $e_i^*: V \to K$, sind linear und eindeutig definiert. Angenommen es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist die Nullabbildung 0. Wende die Abbildung auf die Basisvektoren von V an:

$$0 = 0(e_j) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*\Big)(e_j)$$

$$\overset{5.1}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j,$$

mit $1 \leq j \leq n$. Also sind $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ linear unabhängig.

(iii) Wir zeigen B^* erzeugt V^*. Sei $\varphi \in V^*$ beliebig, also $\varphi : V \to K$ linear. Setze $a_j := \varphi(e_j) \in K$, $1 \leq j \leq n$. Wir zeigen $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$, also $\varphi \in \mathrm{Span}(B^*)$. Damit folgt dann, daß $V^* = \mathrm{Span}(B^*)$ ist.

Beachte $\sum a_i e_i^*$ ist eine Linearkombination linearer Abbildungen, ist also wieder linear. Die linearen Abbildungen φ und $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ stimmen überein, wenn sie auf einer Basis B von V übereinstimmen. Es gilt für $1 \leq j \leq n$:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\Big)(e_j) \overset{5.1}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij}$$

$$= a_j = \varphi(e_j).$$

$\Rightarrow \sum a_i e_i^* = \varphi$, d.h. $V^* = \mathrm{Span}(B^*)$.

□

5.5 Bem:

(a) Beachte, die Abb. e_i^* benötigt zur Definition nicht nur den Vektor e_i, sondern die gesamte Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Es gibt also eine duale Basis, aber ein Konzept "dualer Vektor" macht keinen Sinn.

(b) Der Isomorphismus $V \xrightarrow{\simeq} V^*$ in Prop 5.4 hängt von der gewählten Basis B von V ab. Es gibt also viele solche Isomorphismen, von denen keiner besonders ausgezeichnet ist. (Mit Zusatzstruktur auf dem Vektorraum V kann man auch Basis-unabhängige Isomorphismen konstruieren.)

5.6 Bsp:

(a) Sei $V = K^n$ mit Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ mit $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ - i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$ die hierzu duale Basis.
Sei $\{f_1, \ldots, f_n\} = \mathcal{E}^*$ die hierzu duale Basis.
Dann ist $f_i : K^n \longrightarrow K$ mit $f_i(e_i) = 1$, $f_i(e_j) = 0$ für $i \neq j$.

$$\Rightarrow f_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f_i \Big(\sum_{j=1}^n x_j e_j \Big) = \sum_{j=1}^n x_j \, f_i(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{ij} = x_i,$$

d.h. f_i ist die Koordinatenabbildung aus Bsp 5.3 (a).
Ein beliebiges Element in V^* ist also von der Form $\varphi : V \to K$, mit $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i f_i$. Wir identifizieren $\varphi \mathrel{\hat{=}} (a_1, \ldots, a_n) \in M_{1 \times n}(K)$, und es ist

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

siehe Bsp 5.3(a). Wir identifizieren daher für $V = K^n$ den Dualraum V^* mit den $(1 \times n)$ Zeilenvektoren, also $V^* = (K^n)^t$, (mit t = transponierte Vektoren].

(b)(i) Sei $V = \mathbb{R}[X]$. Dann ist $\dim V = \infty$. Eine Basis von V ist beispielsweise $B := \{1, X, X^2, \dots\}$.

Sei $f_i : V \to \mathbb{R}$ die i-te Koordinatenabbildung.

$$\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \mapsto a_i$$

Wir zeigen, daß $\operatorname{Span}\{f_0, f_1, f_2, \dots\} \neq V^*$ ist.

Ist also V ein unendlich-dimensionaler K-Vektorraum, so bilden die Koordinatenabbildungen keine Basis von V^*.

(ii) Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \int_0^1 p(t)\,dt$. Es ist $\varphi \in V^*$, und es gilt $\varphi(X^i) = \int_0^1 t^i\,dt = \frac{t^{i+1}}{i+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{i+1}$, für $i \geq 0$.

Angenommen es existiert $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $\varphi = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i$. Evaluiere an X^{m+1}.

$$\Rightarrow \frac{1}{m+2} = \varphi(X^{m+1}) = \Big(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i\Big)(X^{m+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \underbrace{f_i(X^{m+1})}_{=0} = 0. \quad ↯$$

Also ist $\varphi \notin \operatorname{Span}\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$.

(c) Sei $V = M_{m\times n}(K)$ mit $\mathcal{E} := \{E_{ij} \mid {1 \leq i \leq m \atop 1 \leq j \leq n}\}$ Basis. Nach Wahl einer Anordnung der Basisvektoren ist die Dualbasis hierzu $\{\lambda_{k,l} \mid 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq l \leq n\}$ mit $\lambda_{k,l}(A) = a_{k,l}$ für $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m \atop 1 \leq j \leq n}$.

(d) Sei $V = \mathbb{R}_n[X] = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \le n \}$.

(i) Es ist $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ Basis von V.
Die Abb. $\varphi : V \longrightarrow V,\ f \mapsto f(X-1)$, ist ein Isomorphismus mit $\varphi^{-1} : V \longrightarrow V,\ g \mapsto g(X+1)$.
Es ist $\varphi(X^i) = (X-1)^i$. Da φ Isomorphismus, folgt $\{\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \dots\} = \{1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n\} =: B$ ist eine Basis von V.

(ii) Um die duale Basis zu B zu finden, müssen wir jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X] = V$ als Linearkombination der Potenzen von $(X-1)$ darstellen. Dies liefert die Taylorentwicklung von p (aus Analysis): Es ist

$$p = p(1) + p'(1)(X-1) + \frac{p''(1)}{2}(X-1)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n .$$

Dann ist $B^* = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$ mit $\lambda_i : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \longmapsto \frac{p^{(i)}(1)}{i!}$
(Koordinatenabbildung bzgl. Basis B)
mit $p^{(i)}$ = i-te Ableitung von p.

5.7 Übung:

(a) Sei $B = \{\binom{2}{1}, \binom{3}{1}\}$ Basis von K^2.
Bestimme die duale Basis B^*.

(b) Sei $B = \{v_1, v_2\}$ Basis von K-Vektorraum V.
Sei $\mathcal{C} = \{u_1, u_2\}$ mit $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_2$. Nach LA I ist dann auch $\mathcal{C}$ Basis von V.

(i) Finde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit $u_1^* = \alpha v_1^* + \beta v_2^*$,
$u_2^* = \gamma v_1^* + \delta v_2^*$.

(ii) Zeige, daß die nach 5.4 zu B bzw $\mathcal{C}$ gehörenden Isomorphismen $\varphi_B, \varphi_{\mathcal{C}} : V \to V^*$ verschieden sind.

Mittels Funktionalen können wir Vektoren unterscheiden. Es gilt:

5.8 Lemma:

Sei V ein K-Vektorraum, $v_0, v_1, v_2 \in V$, $\dim V < \infty$.

(a) Falls $v_0 \neq 0$ ist, existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_0) \neq 0$.

(b) Falls $v_1 \neq v_2$ ist, existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$.

(c) Sei $W \leq V$ Unterraum und $v_0 \in V \setminus W$. Dann existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_0) \neq 0$ und $W \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$.

Beweis:

(a) Dies ist ein Spezialfall von (c) für $W = \{0\}$.

(b) Folgt aus (a) für $v_0 := v_1 - v_2$, denn dann folgt es ex. nach (a) ein $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_0) \neq 0$. Da φ linear, ist $0 \neq \varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2)$; also ist $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$.

(c) Sei B_W Basis von W. Da $v \in V \setminus W$, ist $B_W \cup \{v\}$ linear unabhängig. Ergänze $B_W \cup \{v\}$ zu einer Basis B von V. Sei $\lambda_v : V \longrightarrow K$ die Koordinatenabbildung zu $v \in B$. Dann ist $\lambda_v(v) = 1$ und $\lambda_v(w) = 0$ für alle $w \in B_W$. Also ist auch $\lambda_v(w) = 0$ für alle $w \in W$, da λ_v linear. Damit gilt aber $W \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda_v)$.

Bem: Diese Aussagen gelten auch, falls $\dim V = \infty$. Hier benötigen wir Zorn's Lemma / Auswahlaxiom.

Der Dualraum V^* ist ein K-Vektorraum.
Wir können ihn dualisieren:

5.9 <u>Def</u>: Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt

$$V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V,K), K)$$

<u>Bidualraum von V.</u>

5.10 <u>Bem</u>:

(a) Ein Element $x \in V^{**}$ ist also eine lineare Abbildung

$$x: \begin{array}{l} V^* \longrightarrow K \\ \varphi \longmapsto x(\varphi). \end{array}$$

mit

Die Notation $x(\varphi)$ ist ungewohnt, beachte aber, sie ist logisch korrekt: wir wenden das Funktional x auf das Element $\varphi \in V^*$ an.

(b) Wir wollen ein Element in V^{**} angeben. Dies ist gar nicht so schwer: Sei $v_0 \in V$. Evaluieren an v_0 liefert ein konkretes Beispiel.

Definiere $i_{v_0}: \begin{array}{l} V^* \longrightarrow K \\ \varphi \longmapsto i_{v_0}(\varphi) := \varphi(v_0) \end{array}$

mit

Da $\varphi \in V^*$, ist nach Definition von V^* $\varphi(v_0) \in K$.
Damit ist i_{v_0} wohl definiert.

Es gilt:

$$i_{v_0}(\varphi_1 + \varphi_2) \overset{\text{Def}}{=} (\varphi_1 + \varphi_2)(v_0) \overset{5.1}{=} \varphi_1(v_0) + \varphi_2(v_0)$$

$$\overset{\text{Def}}{=} i_{v_0}(\varphi_1) + i_{v_0}(\varphi_2)$$

und $i_{v_0}(\lambda\varphi) \overset{\text{Def}}{=} (\lambda\varphi)(v_0) \overset{5.1}{=} \lambda \cdot f(v_0) = \lambda i_{v_0}(\varphi)$;

für alle $\lambda \in K$ und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in V^*$.

Es folgt: $i_{v_0}: V^* \longrightarrow K$ ist linear, d.h. $i_{v_0} \in V^{**}$.

5.11 Thm:

Die Abbildung $i: V \longrightarrow V^{**}$, $v_0 \longmapsto i_{v_0}$, siehe 5.10, ist eine injektive lineare Abbildung. Ist zusätzlich $\dim V < \infty$, so ist i ein Isomorphismus.

Beweis:

(a) Wir zeigen i ist linear: Seien $v_1, v_2 \in V$.

Dann ist

$$i_{v_1+v_2}(\varphi) \overset{\text{Def } i}{=} \varphi(v_1+v_2) \overset{\varphi \text{ liner}}{=} \varphi(v_1)+\varphi(v_2)$$

$$\overset{\text{Def } i}{=} i_{v_1}(\varphi) + i_{v_2}(\varphi)$$

$$\overset{5.1}{=} (i_{v_1}+i_{v_2})(\varphi)$$

und

$$i_{\lambda v_1}(\varphi) \overset{\text{Def } i}{=} \varphi(\lambda v_1) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \lambda \cdot \varphi(v_1)$$

$$= \lambda i_{v_1}(\varphi) \overset{5.1}{=} (\lambda i_{v_1})(\varphi),$$

für alle $\varphi \in V^*$. Abbildungen sind gleich, wenn sie auf allen Elementen übereinstimmen. Es folgt:

$$i(v_1+v_2) = i_{v_1+v_2} = i_{v_1} + i_{v_2} = i(v_1) + i(v_2)$$

$$i(\lambda v_1) = i_{\lambda v_1} = \lambda i_{v_1} = \lambda i(v_1),$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$. Also ist i linear.

(b) Wir zeigen, daß i injektiv ist.
Sei $0 = i(v_0) = i_{v_0}$. Dann ist $0 = i_{v_0}(\varphi) = \varphi(v_0)$, für alle $\varphi \in V^*$. Mit 5.8 (a), (was wir eigentlich nur für $\dim V < \infty$ gezeigt haben) folgt dann, daß $v_0 = 0$ ist. Also ist i injektiv.

(c) Ist $\dim V < \infty$, so ist $\dim V \overset{5.4}{=} \dim V^* \overset{5.4}{=} \dim V^{**}$, also ist i Isomorphismus.

5.12 <u>Bem:</u>

(a) Ist $\dim V = \infty$, so ist $\dim V^{**} \gneq \dim V^*$, und damit niemals $V \simeq V^{**}$ (ohne Beweis).

(b) Der Isomorphismus $i : V \to V^{**}$ ist unabhängig von den Basen von V, im Gegensatz zu dem in 5.4 konstruierten Isomorphismus $V \xrightarrow{\simeq} V^*$ (für $\dim V < \infty$).

(c) Wir identifizieren im endlich-dimensionalen Fall oft V mit V^{**}, mittels der Abbildung i. Das bedeutet, wir identifizieren v mit i_v.

(e) Es gilt V^* ist endlich-dimensional, genau dann, wenn V endlich-dimensional ist.
<u>Beweis:</u> Erste Richtung entspricht 5.4. Umgekehrt, ist V^* endlich-dimensional, so sagt 5.4, daß V^{**} endlich-dimensional ist. Da $i : V \hookrightarrow V^{**}$ injektiv, folgt, daß V endlich-dimensional ist.

(d) Sei V endlich-dimensional, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von V. Dann ist $B^{**} = \{i_{e_1}, \dots, i_{e_n}\}$ Basis von V^{**}, denn $i_{e_i}(e_j^*) = e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$. Identifizieren wir V mit V^{**} mittels $v \mapsto i_v$, so entspricht die Basis B^{**} also der ursprünglichen Basis B von V.