5.13 <u>Def</u>: Sei V ein K-Vektorraum und $W \leq V$ Unterraum. Dann heißt $W^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(w) = 0 \;\; \forall w \in W\} \subseteq V^*$ der zu W orthogonale Raum.

<u>Bem</u>: Oft findet man die Notation $W^\perp$ statt W^0 bzw. definiert $\langle \varphi, w \rangle := \varphi(w)$.

5.14 <u>Bem</u>: Ist $W \leq V$ Unterraum, so ist $W^0 \leq V^*$ Unterraum.

Beweis:
(a) Sei $\tilde{\varphi}: V \to K, v \mapsto 0$, die Nullabbildung.
Dann ist $\tilde{\varphi}(w) = 0$ für alle $w \in W$.
$\Rightarrow \tilde{\varphi} \in W^0$.

(b) Seien $\varphi, \psi \in W^0$, sei $\lambda \in K$.
$\Rightarrow \varphi(w) = 0 = \psi(w), \;\; \forall w \in W$.
$\Rightarrow (\varphi + \psi)(w) \overset{5.1}{=} \varphi(w) + \psi(w) = 0 + 0 = 0,$
$(\lambda\varphi)(w) \overset{5.1}{=} \lambda\varphi(w) = \lambda \cdot 0 = 0.$
$\Rightarrow \varphi + \psi, \lambda\varphi \in W^0$.
Damit ist $W^0 \leq V^*$ Unterraum.

5.15 <u>Bsp</u>: Sei $W \leq V$ Unterraum.

(a) Sei $W = V$. Nur die Nullabbildung verschwindet auf $W = V$. Also ist $W^0 = \{0\}$ bzw. $V^0 = \{0\}$.

(b) Sei $W = \{0\}$. Jede Abbildung $\varphi: V \to K$ linear verschwindet auf $W = \{0\}$, denn $\varphi(0) = 0$,
$\Longrightarrow W^0 = V^*$, d.h. $\{0\}^0 = V^*$.

(c) Sei $V = K^2$. Wähle $a, b \in K$ mit $(a,b) \neq (0,0)$.
Die Menge $W := \{\binom{x}{y} \in K^2 \mid ax + by = 0\} \leq V$ Unterraum ist die Lösungsmenge der linearen Gleichung $ax+by=0$.
Definiere die Linearform $m_{(a,b)}: K^2 \to K, \binom{x}{y} \mapsto (a,b)\binom{x}{y} = ax+by$, siehe Beispiel 5.3. Es ist $\operatorname{Ker}(m_{(a,b)}) = W$, also $m_{(a,b)} \in W^0$.

Wir zeigen in Thm 5.16: Es gilt $W^\circ = \text{Span}\{u_{(a,b)}\}$
Hierzu wählen wir eine Basis von W, und ergänzen diese zu einer Basis von V. An der dualen Basis von V^* läßt sich die Basis von W° ablesen. *

5.16 <u>Thm</u>: Sei $W \leq V$ Unterraum, $\dim V < \infty$.

Sei $\{w_1, \dots, w_\ell, v_1, \dots, v_t\}$ Basis von V
mit $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ Basis von W.
Dann ist $\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$ Basis von W°, und es

gilt: $\dim W + \dim W^\circ = \dim V = \dim V^*$.

<u>Beweis</u>: (a) Wir zeigen $\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$ ist Basis von W°; dann folgt die zweite Behauptung:
$\dim V \overset{5.4}{=} \dim V^* = \ell + t = \dim W + \dim W^\circ$.

(b) Nach Definition der dualen Basis in 5.4 gilt
$$v_i^*(w_j) = 0, \text{ für } 1 \leq j \leq \ell.$$
Da v_i^* linear, gilt also $v_i^*(w) = 0$, für alle $w \in W$.
Also sind $v_1^*, \dots, v_t^* \in W^\circ$.
Da $\{v_1^*, \dots, v_t^*\} \subseteq$ Basis von V^*, nämlich $B^* := \{w_1^*, \dots, w_\ell^*, v_1^*, \dots, v_t^*\}$
$\Rightarrow \{v_1^*, \dots, v_t^*\}$ sind linear unabhängig.

(c) Wir zeigen, daß $\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$ ein Erzeugendensystem von W° ist.
Sei $\varphi \in W^\circ \subseteq V^*$. Benutze Basis B^*: Es existieren $\lambda_i, \mu_j \in K$
mit $\varphi = \lambda_1 w_1^* + \dots + \lambda_\ell w_\ell^* + \mu_1 v_1^* + \dots + \mu_t v_t^*$.
$\Rightarrow \varphi(w_i) = \lambda w_1^*(w_i) + \dots + \lambda_\ell w_\ell^*(w_i) + \mu_1 v_1^*(w_i) + \dots + \mu_t v_t^*(w_i) = \lambda_i$, $1 \leq i \leq \ell$.
Wegen $\varphi \in W^\circ$ gilt aber $\varphi(w_i) = 0$. Also ist $\lambda_i = 0$ für $1 \leq i \leq \ell$.
$\Rightarrow \varphi = \mu_1 v_1^* + \dots + \mu_t v_t^* \in \text{Span}\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$
$\Rightarrow W^\circ = \text{Span}\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$, (dh. $\dim W^\circ = t$).

5.17 Bsp: Wir setzen Beispiel 5.15(c) fort.

Es ist $W = \{ \binom{x}{y} \in K^2 \mid ax + by = 0 \}$, $(a,b) \neq (0,0)$.

Zur Vereinfachung nehmen wir an $a \neq 0$.

Dann ist $ax + by = 0 \iff x = -\frac{b}{a} \cdot y$.

Es folgt $W := \operatorname{Span} \{ \binom{-b}{a} \}$ mit $a \neq 0$.

Um W° zu bestimmen, wenden wir Thm 5.16 an:

(i) Ergänze $\{ \binom{-b}{a} \}$ zu Basis B von K^2, etwa

$$B = \{ \binom{-b}{a}, \binom{1}{0} \}.$$

(ii) Bilde duale Basis, d.h. wir suchen in der Notation von 5.6 (a) Zeilenvektoren (r, s) und (t, u) mit

$$(r \ s) \binom{-b}{a} = 1 \qquad (r \ s) \binom{1}{0} = 0$$

$$(t \ u) \binom{-b}{a} = 0 \qquad (t \ u) \binom{1}{0} = 1.$$

Es folgt $r = 0$, $t = 1$, $sa = 1$, $-b + ua = 0$.

Also ist $s = \frac{1}{a}$, $u = \frac{b}{a}$, d.h. $(r \ s) = (0 \ \ 1/a)$

$$(t \ u) = (1 \ \ \tfrac{b}{a})$$

Damit ist $W^\circ = \operatorname{Span} \{ (t, u) \} = \operatorname{Span} \{ (1 \ \ \frac{b}{a}) \}$

$$= \operatorname{Span} \{ (a \ \ b) \}.$$

Wir sehen im Folgenden diverse Anwendungen der Dimensionsformel 5.16. Als erstes bestimmen wir das Duale eines Quotientenvektorraumes:

5.18 **Thm:** Sei $W \leq V$ Unterraum. Dann ist $W^\circ \simeq (V/W)^*$,

mit $\psi: W^\circ \xrightarrow{\simeq} (V/W)^*$, $f \mapsto \bar{f}$, wobei

$\psi(f) = \bar{f} : V/W \to k$ definiert ist durch $\bar{f}(v+W) := f(v)$.

Beweis:

(a) Sei $f \in W^\circ$. Dann ist $f(w) = 0 \ \forall w \in W$.
Mit 3.7 folgt $\bar{f} : V/W \to K/\{0\} = k$ ist wohl-definiert und linear, dh. $\bar{f} \in (V/W)^*$.

(b) Wir zeigen ψ ist linear: Sei $\lambda \in k$ und seien $f, g \in W^\circ$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda f + g)(v+W) &\overset{\text{Def}\,\psi}{=} \overline{(\lambda f + g)}(v+W) \\
&\overset{\text{Def}\,\overline{\lambda f+g}}{=} (\lambda f + g)(v) \\
&\overset{5.1}{=} \lambda f(v) + g(v) \\
&\overset{\text{Def}\,\bar{f}, \bar{g}}{=} \lambda \bar{f}(v+W) + \bar{g}(v+W) \\
&\overset{5.1}{=} (\lambda \bar{f} + \bar{g})(v+W), \quad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \psi(\lambda f + g) = \lambda \bar{f} + \bar{g} = \lambda \psi(f) + \psi(g)$.

Also ist ψ linear.

(c) Wir zeigen ψ ist injektiv. Sei $\bar{f} = \psi(f) = 0$.

$\underset{f(v)=\bar{f}}{\Rightarrow} \bar{f}(v+W) = 0 \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow f = 0$.

(d) Es ist $\dim (V/W)^* \overset{5.4}{=} \dim V/W \overset{3.6}{=} \dim V - \dim W$

$\overset{5.16}{=} \dim W^\circ$

Also ist $W^\circ \simeq (V/W)^*$.

5.19 Thm: Seien $U, W \leq V$ Unterräume. Dann gilt:

(a) $U \subseteq W$ impliziert $W^\circ \subseteq U^\circ$, und es ist $U = W$ genau dann, wenn $U^\circ = W^\circ$ ist;

(b) $(U+W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$;

(c) $U^\circ + W^\circ \subseteq (U \cap W)^\circ$, und es gilt Gleichheit, falls $\dim V < \infty$ ist.

Beweis:

(a)(i) Sei $f \in W^\circ$. Dann ist $f(w) \overset{5.13}{=} 0 \ \forall w \in W$.

$\Rightarrow f(u) = 0 \ \forall u \in U \subseteq W$.

$\overset{5.13}{\Rightarrow} f \in U^\circ$.

(ii) Sei $U \nsubseteq W$. Dann ex $u \in U \setminus W$. Insbesondere ist $u \neq 0$.

$\overset{5.8(c)}{\Rightarrow} \exists \varphi \in V^*$ mit $\varphi(u) \neq 0$ und $W \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\Rightarrow \varphi(W) = 0$ dh. $\varphi \in W^\circ$, aber $\varphi \notin U^\circ$, da $\varphi(u) \neq 0$.

$\Rightarrow W^\circ \nsubseteq U^\circ$. Das kontrapositive sagt also:

Ist $W^\circ \subseteq U^\circ$, so ist $U \subseteq W$.

(b)(i) Sei $f \in (U+W)^\circ$.

$\overset{5.13}{\Rightarrow}$ $f(u+0) = f(u) = 0 \quad \forall u \in U$,
$f(0+w) = f(w) = 0 \quad \forall w \in W$.

$\overset{5.13}{\Rightarrow} f \in U^\circ \cap W^\circ$.

(ii) Die Rückrichtung ist analog: Sei $f \in U^\circ \cap W^\circ$

$\Rightarrow$ $f \in U^\circ$ dh. $f(u) = 0 \ \forall u \in U$,
$f \in W^\circ$ dh. $f(w) = 0 \ \forall w \in W$.

$\overset{f \text{ linear}}{\Rightarrow} f(u+w) = f(u) + f(w) = 0 + 0 = 0 \quad \forall u+w \in U+W$

$\Rightarrow f \in (U+W)^\circ$.

(c) (i) Sei $f \in U^\circ + W^\circ$.

Nach LA I existieren also Vektoren $g \in U^\circ$ und $h \in W^\circ$ mit $f = g + h$.

$\overset{5.13}{\Longrightarrow}$ für $x \in U \cap W$ gilt $f(x) = (g+h)(x) \overset{5.1}{=} g(x) + h(x)$
$= 0 + 0 = 0$.

$\overset{5.13}{\Longrightarrow} f \in (U \cap W)^\circ$. Also ist $U^\circ + W^\circ \subseteq (U \cap W)^\circ$.

(ii) Sei $\dim V < \infty$. Dann folgt mit 5.16:

$$
\begin{aligned}
\dim(U^\circ + W^\circ) &\overset{LA I}{=} \dim U^\circ + \dim W^\circ - \dim(U^\circ \cap W^\circ) \\
&\overset{(b)}{=} \dim U^\circ + \dim W^\circ - \dim(U+W)^\circ \\
&\overset{5.16}{=} (\dim V - \dim U) + (\dim V - \dim W) \\
&\quad - (\dim V - \dim(U+W)) \\
&= \dim V - \dim U - \dim W + \dim(U+W) \\
&\overset{LA I}{=} \dim V - \dim U - \dim W + \dim U + \dim W \\
&\quad - \dim(U \cap W) \\
&= \dim V - \dim(U \cap W) \\
&\overset{5.16}{=} \dim(U \cap W)^\circ.
\end{aligned}
$$

Mit (i) folgt aus LA I: $U^\circ + W^\circ = (U \cap W)^\circ$.

5.20 Thm: Sei $W \leq V$ Unterraum, $\dim V < \infty$.
Dann ist $i|_W : W \longrightarrow (W^\circ)^\circ =: W^{\circ\circ}$ ein Isomorphismus mit i definiert wie in Thm 5.11.
Insbesondere ist $W^{\circ\circ} = \{ i_w \mid w \in W \}$.

Beweis: Nach 5.13 ist

$$W^\circ \overset{5.13}{=} \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(w) = 0, \ \forall w \in W \} \leq V^*, \text{ also}$$

$$W^{\circ\circ} \underset{5.13}{\overset{5.11}{=}} \{ i_v \in V^{**} \mid i_v(\varphi) = 0 \ \ \forall \varphi \in W^\circ \} \leq V^{**}$$

Für $w \in W$ gilt also $i_w(\varphi) = \varphi(w) \overset{5.13}{=} 0, \ \forall \varphi \in W^\circ$.
Also ist $i_w \in W^{\circ\circ}, \ \forall w \in W$.
Damit ist $i|_W : W \longrightarrow W^{\circ\circ}$ wohldefiniert, und nach 5.11 ist die Abbildung injektiv. Nach 5.16 gilt

$$\begin{aligned} \dim W^{\circ\circ} &\overset{5.16}{=} \dim V^{**} - \dim W^\circ \\ &\overset{5.16}{=} \dim V - (\dim V^* - \dim W) \\ &\overset{5.4}{=} \dim W. \end{aligned}$$

(Beachte: Hierbei haben wir 5.16 angewandt auf

- $W \leq V$: $\dim V^* = \dim W + \dim W^\circ$
- $W^\circ \leq V^*$: $\dim V^{**} = \dim W^\circ + \dim W^{\circ\circ}$)

Damit ist $i|_W : W \to W^{\circ\circ}$ Isomorphismus und $W^{\circ\circ} = \{ i_w \mid w \in W \}$.

Bem: Wie in 5.12 angemerkt, identifizieren wir oft V und V^{**} mittels i. Entsprechend können wir W mit $W^{\circ\circ}$ identifizieren.

5.21 **Bsp**: Sei $V = K^n$. Sei $\varphi = (a_1, \dots, a_n) \in V^*$ fest gewählt.
Dann beschreibt φ eine homogene lineare Gleichung:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

Ein homogenes lineares Gleichungssystem entspricht also Funktionalen $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$. Mit der Identifizierung $V \xrightarrow[5.11]{\tilde{i}} V^{**}$ gilt hierbei:

$$U := \operatorname{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \leq V^*$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad U^0 &= \{ i_x \in V^{**} \mid i_x(\varphi_1) = \dots = i_x(\varphi_r) = 0 \} \\ &= \{ x \in V \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0 \} \end{aligned}$$

$=$ Lösungsmenge des durch $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ definierten homogenen LGS.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren bestimmt also eine Basis von $U = \operatorname{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \leq V^*$.

Die Diskussion im Kapitel zeigt auch: Zu jedem Unterraum $W \leq V$ gibt es ein LGS, welches Lösungsmenge W hat. Dieses findet man, indem man eine Basis von $W^0 \leq V^*$ bestimmt. Die minimale Anzahl an Gleichungen die man hierfür benötigt, ist

$$s := \dim W^0 \overset{5.16}{=} \dim V - \dim W.$$