Wir leiten eine weitere Normalform her:

5.34 **Bem**: Sei $T: V \to V$ linear, $n = \dim V$, $0 \neq v \in V$.
Wir definieren in Analogie zum Minimalpolynom m_T von T ein Minimalpolynom $m_{T,v}$ von v bezüglich T.

Die $n+1$ Vektoren $\{v, Tv, \ldots, T^n v\} \subseteq V$ sind linear abhängig.
Wähle $d \geq 1$ minimal mit $\{v, Tv, \ldots T^d v\}$ ist linear abhängig. Insbesondere sagt dies $\{v, Tv, \ldots, T^{d-1}v\}$ sind linear unabhängig, und es existieren $\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_d \in K$, nicht alle Null, mit

$$\tilde{a}_0 v + \tilde{a}_1 Tv + \ldots + \tilde{a}_d T^d v = 0.$$

Es muß gelten $\tilde{a}_d \neq 0$ (sonst sind $\{v, Tv, \ldots, T^{d-1}v\}$ lin. abh. ↯)

$\Rightarrow$ Es existieren eindeutige Skalare $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1} \in K$

mit $T^d = -a_0 v - a_1 Tv - \ldots - a_{d-1} T^{d-1} v$.

Das Polynom $m_{T,v} := a_0 + a_1 X + \ldots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d \in K[X]$ heißt das <u>Minimalpolynom von v bezüglich T</u>.

Mit der Notation aus der vorigen Bemerkung

5.35 **Prop**: Mit der Notation aus der vorigen Bemerkung gilt:

Ist $0 \neq v \in V$ ~~und~~ $f \in K[X]$ mit $f(T)(v) = 0$,
so folgt $m_{T,v} \mid f$.

Insbesondere folgt $m_{T,v} \mid m_T =$ Minimalpolynom von T.

Beweis: (Ganz analog zur Definition von m_T in 2.46.)

(a) Mache Division mit Rest; dann existieren $q, r \in K[X]$ mit $f = q \cdot m_{T,v} + r$, $\deg r < \deg m_{T,v}$.

Haben $0 \overset{\text{Vor}}{=} f(T)(v) = q(T)\underbrace{m_{T,v}(T)(v)}_{=0} + r(T)(v) = r(T)(v)$.

Schreibe $r = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m \in K[X]$.

Nach Konstruktion ist $m = \deg r < \deg m_{T,v} = d$.

Da $0 = r(T)(v) = (b_0 + b_1 T + \dots + b_m T^m)\, v$

$$= b_0 v + b_1 Tv + \dots + b_m T^m v$$

mit $\deg r = m < \deg m_{T,v}$, folgt aus der Minimalität von d, daß $r = 0$ ist. Also gilt $m_{T,v} \mid f$.

(b) Da $m_T(T) = 0$ nach **2.46**, folgt $m_T(T)v = 0$.
Insbesondere gilt also $m_{T,v} \mid m_T$ nach (a).

5.36 <u>Bsp</u>: Sei $f := a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.
Sei $V = K^n$, $T: V \to V$, $x \mapsto A_f x$ mit $A_f = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

(a) Nach Blatt 15.5 LA I gilt $\pm \chi_{A_f} = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n = f$

(b) Sei $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis von V.

$\Rightarrow Te_1 = e_2, \quad Te_2 = e_3, \quad \dots, \quad Te_{n-1} = e_n$

und $Te_n = -a_0 e_1 - a_1 e_2 - \dots - a_{n-1} e_n$.

$\Rightarrow T^2 e_1 = e_3, \; T^3 e_1 = e_4, \dots, T^{n-1} e_1 = e_n$

$\Rightarrow \{e_1, Te_1, T^2 e_1, \dots, T^{n-1} e_1\}$ ist linear unabhängig

und $T^n e_1 = Te_n = -a_0 e_1 - \dots - a_{n-1} e_n$

Es ist also $m_{T,e_1} = f$.

(c) Nach Prop 5.35 gilt $m_{T,e_1} \mid m_T$, also $f \mid m_T$.

Nach 3.23 gilt $m_T \mid \chi_T = f$. Also ist $m_T = f$.

Wir beobachten an diesem Beispiel: es existiert ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $m_{T,v} = m_T$.

5.37 **Prop:**

Die Beobachtung aus dem letzten Beispiel gilt allgemein. Sei $T: V \to V$ linear. Dann existiert $0 \neq v \in V$ mit $m_{T,v} = m_T$.

<u>Beweis:</u>
(a) Sei $m_T = f^b$ mit $f \in K[X]$ irreduzibel, $b \in \mathbb{N}$.

Nach 5.35 ist $m_{T,v} \mid m_T = f^b$ für $v \in V$.

$\Rightarrow m_{T,v} = f^{a_v}$ mit $a_v \leq b$.

Setze $a := \max\{a_v \mid v \in V\}$.

Angenommen $a < b$. Da $m_{T,v}(T)(v) = 0$ nach Def 5.34

$\Rightarrow f^a(T)(v) = 0 \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow f^a(T) = 0$.

$\overset{2.46}{\Rightarrow} m_T \mid f^a$, mit $a < b$. Widerspruch.

Also existiert $y \in V$ mit $m_{T,y} = m_T$.

(b) Nach Thm 4.3 können wir V in seine Haupträume V_{f_i} T-invariant mit Minimalpolynom zerlegen. Diese sind T-invariant mit Minimalpolynom ... Wir behandeln den Fall $\overset{n=2:}{} V = V_f \oplus V_g$ wie in (a). Wir behandeln den Fall ... und V_f bzw V_g mit $f, g \in K[X]$ irreduzibel, und V_f bzw V_g wie in (a) mit Minimalpolynomen f^a bzw g^b.

Der allgemeine Fall für n viele Haupträume folgt dann induktiv.

Nach (a) existiert $u \in V_f$ mit $m_{T,u} = f^a$ und es existiert $w \in V_g$ mit $m_{T,w} = g^b$.

Betrachte $v := u + w \in V$.

Nach 5.35 gilt $m_{T,v} \mid f^a g^b = m_T$, d.h. $m_{T,v} = f^c g^d$ mit $c \leq a$, $d \leq b$.

Wir wollen zeigen: $c = a$, $d = b$.

(i) Da V_f ein T-invarianter Unterraum ist nach 4.3(a), ist $g(T): V_f \longrightarrow V_f$ linear. Wir zeigen $g(T)$ ist ein Isomorphismus. Angenommen $y \in V_f$ mit $0 = g(T)(y)$. Dann ist nach 5.35: $m_{T,y} \mid g$. Es gilt aber auch $m_{T,y} \mid f^a = m_{T|_{V_f}}$. Da $ggT(f^a, g) = 1$

$\Rightarrow m_{T,y} = 1$

$\Rightarrow y = 0$.

Also ist $g(T)$ injektiv. Da $\dim V_f < \infty$

$\overset{LAI}{\Longrightarrow}$ $g(T)$ ist Isomorphismus. Jetzt der eigentliche Beweis:

(ii) Angenommen $c < a$. Da $m_{T,u} = f^a$, folgt $f^c(T)(u) \neq 0$ (*)

Da $g(T)$ Isomorphismus auf V_f

$\Rightarrow g(T)^d$ ist Isomorphismus auf V_f.

Da $0 = m_{T,v}(T)(v) = m_{T,v}(T)(u+w) = \underbrace{m_{T,v}(T)(u)}_{\in V_f} + \underbrace{m_{T,v}(T)(w)}_{\in V_g}$

Da $V_f \cap V_g = \{0\}$

$\Rightarrow m_{T,v}(T)(u) = 0 = m_{T,v}(T)(w)$.

$\Rightarrow 0 = m_{T,v}(T)(u) = (f^c g^d)(T)(u)$

$\overset{2.44}{=} g^d(T)\big(\underbrace{f^c(T)(u)}_{\neq 0 \text{ siehe } (*)}\big) \underset{\text{nach (i)}}{\neq} 0$, da $g^d(T)$ Isomorphismus.

Dies ist ein Widerspruch. Also ist $c = a$.

Analog zeigt man $d = b$.

5.38 **Prop:** Sei $T: V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann gilt:

(a) Ist $U \leq V$ ein T-invarianter Unterraum, dann ist $U^\circ \leq V^*$ ein T^*-invarianter Unterraum. (UR)

(b) Ist $V = U_1 \oplus U_2$ eine Zerlegung in T-invariante UR, dann ist $V^* = U_1^\circ \oplus U_2^\circ$ eine Zerlegung in T^*-invariante UR

Beweis:

(a) Für $\varphi \in U^\circ$ gilt $\varphi(U) = 0$. Also gilt:

$$(T^*\varphi)(x) \overset{\text{Def } T^*}{=} (\varphi \circ T)(x) = \varphi(\underbrace{Tx}_{\in U \text{ nach Vor.}}) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Also ist $T^*(\varphi) \in U^\circ$.

(b)(i) Nach (a) sind U_1° und U_2° T^*-invariante Unterräume.

Da $\dim U_1 + \dim U_2 \overset{LAI}{=} \dim(U_1 \oplus U_2) \overset{\text{Vor}}{=} \dim V$

$$\overset{5.16}{=} \dim U_1 + \dim U_1^\circ$$

$\Rightarrow \dim U_2 = \dim U_1^\circ$. Analog $\dim U_1 = \dim U_2^\circ$.

Um die Zerlegung $V^* = U_1^\circ \oplus U_2^\circ$ zu zeigen, müssen wir also nur noch zeigen: $U_1^\circ \cap U_2^\circ = \{0\}$.

(ii) Sei $\varphi \in U_1^\circ \cap U_2^\circ$.

$\Rightarrow \varphi(U_1) = \{0\} = \varphi(U_2)$.

Da $V = U_1 + U_2$ und φ linear

$\Rightarrow \varphi(V) = \{0\}$.

$\Rightarrow \varphi = 0$.

$\Rightarrow U_1^\circ \cap U_2^\circ = \{0\}$.

5.39 **Def**: Ein Unterraum $W \leq V$ heißt <u>T-zyklisch</u>, falls es einen Vektor $w \in W$ gibt und $r \in \mathbb{N}_0$ mit $B := \{w, Tw, T^2w, \dots, T^r w\}$ ist linear unabhängig und $W = \mathrm{Span}(B)$.

5.40 <u>Lemma</u>: Ist $w \in V$ mit $\deg m_{T,v} = k$, dann ist $W := \mathrm{Span}\{w, Tw, \dots, T^{k-1}w\} \leq V$ ein T-zyklischer Unterraum und W ist T-invariant.

<u>Beweis</u>:

(a) Angenommen $\sum_{i=0}^{k-1} a_i T^i w = 0$ mit $a_i \neq 0$ für ein i.

$\Rightarrow \quad 0 = 0(w) = (\sum_{i=0}^{k-1} a_i T^i)(w)$

$\Rightarrow \quad \exists_{0 \neq p} \in K[X]$ mit $\deg p < \deg m_{T,w}$ und $p(T)(w) = 0$ $\lightning$

Also sind $B := \{w, Tw, \dots, T^{k-1}w\}$ linear unabhängig.

(b) Sei $m_{T,w} = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1 X + a_0$. Da $m_{T,w}(T)w = 0$

$$\Rightarrow \quad T^k w = -a_{k-1}T^{k-1}w - \dots - a_1 Tw - a_0 w \in \mathrm{Span}(B).$$

(Induktiv folgt $T^r w \in \mathrm{Span}(B)$ für $r \geq k$.)

$\Rightarrow \quad T(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i T^i w) \in \mathrm{Span}(B) = W$

$\Rightarrow \quad W$ ist T-invariant.

(Jacob, 1973)

5.41 Thm: Sei V ein n-dimensionaler k-Vektorraum, sei $T: V \to V$ linear.

$\Rightarrow$ V ist direkte Summe T-zyklischer Unterräume.

Beweis: (a) Sei $k := \deg m_T$.

Nach 5.37 existiert $y \in V$ mit $m_{T,y} = m_T$.

Nach 5.40 ist $W := \operatorname{Span}\{y, Ty, \dots, T^{k-1}y\}$ T-zyklisch und T-invariant. Wir zeigen: Ist $W \neq V$, so existiert $W' \leq V$ mit $V = W \oplus W'$ und W' ist T-invariant. Mit Induktion nach n folgt dann, daß V eine direkte Summe T-zyklischer T-invarianter Unterräume ist.

(b) Ergänze $\{y =: y_1, Ty =: y_2, T^2y =: y_3, \dots, T^{k-1}y =: y_k\}$ zu einer Basis $\{y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n\} =: B$ von V.

Sei $B^* = \{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ die zu B duale Basis von V^*.

Schreibe $y^* := y_k^*$.

$\overset{5.4}{\Longrightarrow}$ $y^*(y_i) = 0$ für $1 \leq i \leq k-1$, und $y^*(y_k) = 1$.

Definiere $U := \operatorname{Span}\{y^*, T^*y^*, T^{*2}y^*, \dots, (T^*)^{k-1}y^*\}$

Nach 5.33 ist $m_{T^*} = m_T$, also ist $\deg m_{T^*} = k$.

$\Rightarrow$ U ist T^*-invariant.

Wir zeigen $U \cap W^\circ = \{0\}$ und $\dim U = k$.

Gilt dies, so folgt $V^* = U \oplus W^\circ$, da

$$\dim U + \dim W^\circ = k + (n-k) = n = \dim V^*.$$

Nach 5.38 ist W° ein T^*-invarianter Unterraum von V^*.

$\overset{5.38}{\Longrightarrow}$ $V \overset{5.11}{=} V^{**} = U^\circ \oplus W^{\circ\circ} \overset{5.20}{=} U^\circ \oplus W$ ist direkte Summe T-invarianter Unterräume, d.h. $W' := U^\circ$.

(c)(i) Angenommen $U \cap W^0 \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists\, 0 \le s \le k-1$ so, daß $a_s \neq 0$ ist und

$$x := \underbrace{a_0 y^* + a_1 T^* y^* + \ldots + a_s (T^*)^s y^*}_{\text{Linearkombination in } U} \in W^0$$

(ii) Analog: Angenommen $\dim U < k$. Dann sind die Vektoren $\underbrace{y^*, T^* y^*, \ldots, (T^*)^{k-1} y^*}_{k \text{ Vektoren in } U}$ linear abhängig.

$\overset{\dim U < k}{\Rightarrow} \exists\, 0 \le s \le k-1$ so, daß $a_s \neq 0$ ist und

$$x := a_0 y^* + a_1 T^* y^* + \ldots + a_s (T^*)^s y^* \in W^0.$$

Wir können also sowohl in (i) als auch (ii) auf dieselbe Art weiter argumentieren für den gefundenen Vektor x mit $a_s \neq 0$.

Da W^0 ein T^*-invarianter Unterraum ist,

$\Rightarrow (T^*)^{k-1-s} x \in W^0$ mit $x = (a_0 + a_1 T^* + \ldots + a_s (T^*)^s)\, y^*$;

wir schreiben $(T^*)^{k-1-s} x =: f(T^*)(y^*)$.

$$\Rightarrow 0 \overset{\text{Def } W^0}{=} T^{*(k-1-s)}(x)(y), \text{ denn } y \in W$$

$$= (f(T^*)(y^*))(y)$$

$$= y^*(f(T))(y)$$

$$\overset{y^* = y_k^*}{=} y_k^* (a_0 T^{k-1-s} + a_1 T^{k-s} + \ldots + a_s T^{k-1})\, y$$

$$= a_0 y_k^* (T^{k-1-s} y_1) + a_1 y_k^* (T^{k-s} y_1) + \ldots + a_s y_k^* (T^{k-1} y_1)$$

$$= a_0 y_k^* (y_{k-s}) + a_1 y_k^* (y_{k-s-1}) + \ldots + a_s y_k^* (y_k)$$

$$= a_s. \quad ⚡$$

Also ist $U \cap W^0 = \{0\}$ und $\dim U = k$.

5.42 Korollar (Frobenius Normalform)

Sei $T: V \to V$ linear, $n = \dim V$.
Dann existiert eine Basis B von V mit

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \boxed{A_{f_1}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{f_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{f_d}} \end{pmatrix}$$

mit $f_i = \min_{T,v_i} \in k[X]$ für $0 \neq v_i \in V$.
Hierbei ist A_{f_i} definiert wie in Bsp 5.
Man nennt A_f Begleitmatrix zu f.

Beweis:
Nach 5.41 ist $V = U_{v_1} \oplus \ldots \oplus U_{v_d}$
für $v_1, \ldots, v_d \in V \setminus \{0\}$, wobei $U_{v_i} := \operatorname{Span}(B_i)$
mit $B_i := \{v_i, Tv_i, T^2 v_i, \ldots\}$.
Wähle $B := \dot{\bigcup}_{i=1}^{d} B_i$.
Da alle U_{v_i} T-invariant sind, erhalten wir
eine Block-Diagonalmatrix. Hierbei ist

$$M_{B_i}(T|_{U_{v_i}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & & & 1 & -a_{n_i-1} \end{pmatrix}$$

Begleitmatrix zu $f_i := a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n_i-1} X^{n_i-1} + X^{n_i}$

Begleitmatrix zum Polynom $f_i := a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n_i-1} X^{n_i-1} + X^{n_i}$,
$n_i \in \mathbb{N}$, $a_j \in K$. (Siehe Bsp 5.36) $= m_{T,v_i}$

5.43 Bem: Man kann genauer zeigen: Es existieren
Vektoren $v_1, \ldots, v_d \in V \setminus \{0\}$ mit
(a) $V = U_{v_1} \oplus \ldots \oplus U_{v_d}$
(b) $m_{T,v_d} \mid m_{T,v_{d-1}} \mid \ldots \mid m_{T,v_1} = m_T$.

5.44 Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\chi_A = (X-1)^3$. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$.

Wegen $(A-I)^2 = (E_{13}+E_{21})(E_{13}+E_{21}) = E_{23} \neq 0$

$\Rightarrow m_A = (X-1)^3 = \chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 =: X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

$\Rightarrow \{I, A, A^2\}$ sind linear unabhängig.

Also existiert $v \in K^3$ mit $\{Iv, Av, A^2 v\}$ linear unabhängig.

Wähle $v = e_3$. Setze $B := \{e_3, Ae_3, A^2 e_3\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann ist $B \subseteq K^3$ linear unabhängig. Es gilt

$$M_B(T_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

denn $A^3 e_3 \overset{\checkmark}{=} (3A^2 - 3A + I)e_3$

$$= 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$