§ 6 Bilinearformen.

Sei K Körper und V, W K-Vektorräume.

6.1 Def: Eine Abbildung $\beta : V \times W \to K$ heißt eine Bilinearform auf $V \times W$, falls β in jeder Variablen linear ist, also gilt:

$$\beta(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \beta(v_1, w) + \alpha_2 \beta(v_2, w)$$
$$\beta(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 \beta(v, w_1) + \alpha_2 \beta(v, w_2),$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und $v, v_1, v_2 \in V$ und $w, w_1, w_2 \in W$.
Schreibe $Bil(V,W)$ für die Menge aller Bilinearformen $\beta : V \times W \to K$. Ist $V = W$, so heißt $\beta \in Bil(V,V)$ eine Bilinearform auf V oder von V, und wir schreiben kurz $Bil(V) := Bil(V,V)$.

6.2 Bem:

(a) $Bil(V,W)$ ist ein K-Vektorraum mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, d.h. mit

$$(\beta_1 + \beta_2)(v,w) := \beta_1(v,w) + \beta_2(v,w)$$
$$(\lambda\beta)(v,w) := \lambda \cdot \beta(v,w),$$

mit $v \in V$, $w \in W$ und $\beta, \beta_1, \beta_2 \in Bil(V,W)$ und $\lambda \in K$.

(b) Die Definition 6.1 besagt, daß die Abbildungen $\beta(v,-) : W \to K$ und die Abbildungen $\beta(-,w) : V \to K$ alle linear sind. Insbesondere folgt, daß

$$\beta(0,w) = 0, \quad \text{für alle } w \in W$$
$$\beta(v,0) = 0, \quad \text{für alle } v \in V.$$

Wie auch bei linearen Abbildungen lassen sich Bilinearformen leicht durch Matrizen beschreiben. Interessant sind dann Bilinearformen mit weiteren Eigenschaften.

6.3 Def:

(a) Eine Bilinearform $\beta \in Bil(V,W)$ heißt nicht-ausgeartet oder regulär in der 1. Variable beziehungsweise in der 2. Variablen, falls gilt

$\{v \in V \mid \beta(v,w) = 0 \quad \forall w \in W\} = \{0\}$, beziehungsweise

$\{w \in W \mid \beta(v,w) = 0 \quad \forall v \in V\} = \{0\}$.

Andernfalls heißt sie ausgeartet.

(b) Eine Bilinearform $\beta \in Bil(V)$ heißt symmetrisch, falls $\beta(v,w) = \beta(w,v)$ für alle $v,w \in V$ ist. Sie heißt

- schief-symmetrisch, falls $\beta(v,w) = -\beta(w,v)$, $\forall v \in V, w \in V$,
- alternierend, falls $\beta(v,v) = 0$, für alle $v \in V$.

6.4 Bem: Sei $\beta \in Bil(V)$.

(a) Alternierend impliziert schief-symmetrisch:

Da $0 \overset{Vor.}{=} \beta(v+w, v+w) \overset{\beta \text{ bilin.}}{=} \underbrace{\beta(v,v)}_{=0} + \beta(v,w) + \beta(w,v) + \underbrace{\beta(w,w)}_{=0}$

$\Rightarrow \beta(v,w) = -\beta(w,v)$.

(b) Ist β symmetrisch, alternierend oder schief-symmetrisch, so impliziert die Linearität in der 1. Variable, daß β auch linear in der 2. Variable ist.

Übung: Sei char $K \neq 2$, also $1+1 \neq 0$ im Körper K.

(a) Ist β schief-symmetrisch, so folgt β ist alternierend.

(b) Jede symmetrische Bilinearform β ist vollständig durch die Werte $\beta(v,v)$, für $v \in V$, bestimmt.

(c) Jedes $\beta \in Bil(V)$ kann eindeutig als $\beta = \beta_1 + \beta_2$ geschrieben werden mit β_1 symmetrisch und β_2 schiefsymmetrisch.

6.5 Bsp: Der Prototyp der Bilinearformen ist wie folgt gegeben: Sei $A \in M_{m\times n}(K)$ und $\beta_A : K^m \times K^n \to K$ definiert durch

$$\begin{aligned}\beta_A(x,y) &= x^T A y \\ &= \sum_{i=1}^m x_i (Ay)_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j\end{aligned}$$

(a)(i) Dann ist $\beta := \beta_A$ eine Bilinearform, die von A vermittelte Bilinearform auf $K^m \times K^n$, denn beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned}\beta(x+z,y) = (x+z)^T A y &= (x^T + z^T) A y \\ &= x^T A y + z^T A y \\ &= \beta(x,y) + \beta(z,y).\end{aligned}$$

Genauso:

$$\beta(\lambda x, y) = (\lambda x)^T A y = \lambda (x^T A y) = \lambda \cdot \beta(x,y),$$

für alle $\lambda \in K, z, x \in K^m, y \in K^n$. Dies zeigt Linearität in der 1. Variablen. Analog für 2. Variable.

(ii) Es ist β symmetrisch, genau dann, wenn die Matrix A symmetrisch ist:

(i) Wir haben für β symmetrisch:

$$a_{ij} = e_i^T A e_j = \beta(e_i, e_j) \overset{\text{Vor.}}{=} \beta(e_j, e_i) = e_j^T A e_i = a_{ji},$$

für alle $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

(ii) Wir haben für $A = A^T$, also A symmetrisch:

$$\begin{aligned}\beta(x,y) = x^T A y &\overset{\text{1×1}}{=} (x^T A y)^T = y^T A^T (x^T)^T = y^T A x \\ &= \beta(y,x),\end{aligned}$$

für alle $x \in K^m, y \in K^n$.

(b) Ein Spezialfall ist $A = I_n$, $n = m$. Dann ist

$$\beta : K^n \times K^n \longrightarrow K$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

eine symmetrische Bilinearform. Wir studieren später Skalarprodukte, spezielle Bilinearformen. Diese Bilinearform β heißt <u>Standard</u>-<u>Skalarprodukt</u>.

6.6 Bsp: Es gibt viele weitere Beispiele.

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann ist $\langle -,- \rangle : V \times V^* \to K$, definiert durch $\langle v, f \rangle := f(v)$ eine Bilinearform, die in beiden Variablen nicht ausgeartet ist:

(i) Sei $f \in V^*$ mit $\langle v, f \rangle = 0 \ \forall v \in V$.
$\Rightarrow f(v) = 0, \ \forall v \in V$.
$\Rightarrow f = 0$.

(ii) Sei $v \in V$ mit $0 = \langle v, f \rangle = f(v)$, für alle $f \in V^*$.
Wähle Basis $\{v_1, \ldots, v_n\} = B$ von V. Bilde duale Basis $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ und wähle $f = v_j^*$, $1 \leq j \leq n$.
$\Rightarrow 0 = v_j^*(v) =$ j-te Koordinate von v bzgl Basis B
$\Rightarrow v = 0$.

(b) Schränkt man eine Bilinearform $\beta \in Bil(V,W)$ auf einen Unterraum von $V \times W$ ein, so erhält man wieder eine Bilinearform.

Wie bei linearen Abbildungen, wo man sich insbesondere für $End_K(V)$, die Endomorphismen eines Vektorraumes V interessiert, gilt hier: Von besonderem Interesse ist $Bil(V)$.

(c) Ist V endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $T_1, T_2 \in End_K(V)$, so wird durch

$$\beta : End_K(V) \times End_K(V) \to K, \ (T_1, T_2) \mapsto Spur(T_1 \circ T_2)$$

eine Bilinearform definiert. Wegen $Spur(T_1 \circ T_2) = Spur(T_2 \circ T_1)$ folgt, diese ist symmetrisch.

(d) Sei V der Vektorraum der konvergenten Folgen über $\mathbb{R}$. Definiere für konvergente Folgen $a=(a_n)$ und $b=(b_n)$ aus V:

$$s(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n b_n .$$

Dann ist s eine symmetrische Bilinearform auf V. Ist s ausgeartet?

(e) Sei $V=\mathbb{R}[X]$. Definiere für $f,g\in V$:

$$\sigma(f,g) := \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)\cdot g^{(m)}(0)$$

mit $f^{(m)}, g^{(m)}$ jeweils m-ten Ableitungen. Beachte, die Summe ist endlich. Dann ist σ eine symmetrische Bilinearform. Ist σ ausgeartet?

(f) In der speziellen Relativitätstheorie modelliert man die Raumzeit unter anderem als $\mathbb{R}^4$ mit der symmetrische Bilinearform

$$\beta(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4\cdot c^2,$$

wobei c = Lichtgeschwindigkeit, x_1,x_2,x_3 die Raumkoordinaten, x_4 = Zeit.