In Linearer Algebra I verstehen wir lineare Abbildungen mit Hilfe von darstellenden Matrizen. Insbesondere wissen wir $\mathrm{Hom}(V,W) \simeq M_{m\times n}(K)$ mit $m = \dim W$ und $n = \dim V$. Die folgende Proposition identifiziert $\mathrm{Bil}(V,W)$ mit Homomorphismen, die uns vertrauter sind:

6.7 Prop:

(a) Die Abbildung $\mathrm{Bil}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W^*)$, definiert durch
$$\beta \longmapsto [v \longmapsto \beta(v,-)] =: \beta_1$$
ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Hierbei gilt:
β ist nicht ausgeartet in der 1. Variablen
$\Longleftrightarrow$ β_1 ist injektiv.

(b) Die Abbildung $\mathrm{Bil}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W,V^*)$, definiert durch
$$\beta \longmapsto [w \longmapsto \beta(-,w)] =: \beta_2$$
ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Hierbei gilt:
β ist nicht ausgeartet in der 2. Variablen
$\Longleftrightarrow$ β_2 ist injektiv.

Beweis (a) (i) Seien $\beta, \gamma \in \mathrm{Bil}(V,W)$. Dann gilt:
$$(\beta+\gamma)_1(v) = (\beta+\gamma)(v,-) = \beta(v,-) + \gamma(v,-), \quad \forall v \in V$$
$$\Rightarrow \quad (\beta+\gamma)_1 = \beta_1 + \gamma_1.$$
Analog gilt $(\lambda\beta)_1 = \lambda\beta_1$, für alle $\lambda \in K$.
Damit ist die in (a) angegebene Abbildung linear.

(ii) Die Umkehrabbildung ist gegeben durch
$$\mathrm{Hom}(V,W^*) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V,W), \quad \gamma \longmapsto \hat{\gamma}$$
mit $\hat{\gamma}(v,w) := \gamma(v)(w)$, für $v \in V$, $w \in W$. Aus der Linearität von γ bzw $\gamma(v)$ folgt die Bilinearität von $\hat{\gamma}$.

(iii) Es ist β_1 injektiv $\iff$ $0 = \operatorname{Ker} \beta_1 = \{v \in V \mid \beta_1(v) = 0\}$

$$= \{v \in V \mid \beta(v,-) = 0\}$$

$$= \{v \in V \mid \beta(v,w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

$\iff$ β ist nicht ausgeartet.

(b) Folgt analog. (Übung)

6.8 <u>Bem</u>: Jetzt nutzen wir im nächsten Schritt darstellende Matrizen linearer Abbildungen und betrachten:

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Bil}(V,W) & \xrightarrow{\text{Prop. 6.7}} & \operatorname{Hom}(V,W^*) & \xrightarrow[\text{Matrix}]{\text{darst.}} & M_{n\times m}(K) & \xrightarrow{\text{transp.}} & M_{m\times n}(K) \\ \beta & \longmapsto & \beta_1 & \longmapsto & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}^*}(\beta_1) & \longmapsto & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}^*}(\beta_1)^T \end{array}$$

wobei $\mathcal{B}$ Basis von V, $\mathcal{C}$ Basis von W und $\mathcal{C}^*$ duale Basis von $\mathcal{C}$ ist. Wir wollen verstehen, wie die darstellende Matrix von β_1 aussieht; hierzu müssen wir die Funktionale $\beta_1(v_j,-)$ in der Basis $\mathcal{C}^*$ ausdrücken. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$.

Nach 5.4 Beweisteil (iii) gilt:

$$\beta_1(v_j) = \beta(v_j,-) = \sum_{t=1}^{n} \beta(v_j,w_t)\, w_t^*, \quad 1 \le j \le m.$$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}^*}(\beta_1) = \begin{pmatrix} \beta(v_1,w_1) & \cdots & \beta(v_m,w_1) \\ \beta(v_1,w_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \beta(v_1,w_n) & \cdots & \beta(v_m,w_n) \end{pmatrix}$$

Alle drei Abbildungen oben sind Isomorphismen.

Also haben wir gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Bil}(V,W) & \xrightarrow{\cong} & M_{m\times n}(K) \\ \beta & \longmapsto & (\beta(v_i,w_j))_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} =: A_\beta =: [\beta]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ & & =: M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\beta) \end{array}$$

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ und $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$.
Wie bei linearen Abbildungen können wir jeder Bilinearform $\beta \in Bil(V, W)$ eine Matrix $A = A_\beta := (\beta(v_i, w_j))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ in $M_{m \times n}(K)$ zuordnen. Diese Matrix heißt Gram-Matrix oder Strukturmatrix oder einfach darstellende Matrix zu β, und es gilt nach 6.8:

6.9. Thm (darstellende Matrix)

Die Abbildung $\phi: Bil(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(K)$, $\beta \mapsto A_\beta$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus mit

$$\beta\Big(\sum_{i=1}^m x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j w_j\Big) = (x_1, \dots, x_m)\, A_\beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Beweis: Wir geben einen alternativen direkten Beweis, ohne 6.7 ohne 6.8.
Man sieht leicht, daß ϕ linear ist:

(a) ~~Man sieht leicht, daß~~

Es gilt $\phi(\beta_1 + \beta_2) = A_{\beta_1 + \beta_2}$ mit

$$\begin{aligned} (A_{\beta_1+\beta_2})_{ij} &= (\beta_1 + \beta_2)(v_i, w_j) \\ &= \beta_1(v_i, w_j) + \beta_2(v_i, w_j) \\ &= (A_{\beta_1})_{ij} + (A_{\beta_2})_{ij}, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n. \end{aligned}$$

Analog ist $A_{\lambda\beta} = \lambda \cdot A_\beta$, für $\lambda \in K$.
Also ist $\phi(\beta_1 + \beta_2) = A_{\beta_1+\beta_2} = A_{\beta_1} + A_{\beta_2} = \phi(\beta_1) + \phi(\beta_2)$
und $\phi(\lambda\beta) = \lambda\phi(\beta)$, $\forall \lambda \in K$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in Bil(V, W)$.

(b) Die Umkehrabbildung von ϕ ist die Abbildung

$$\psi: M_{m \times n}(K) \longrightarrow Bil(V, W), \quad A \mapsto \beta_A,$$

mit $\beta_A(v, w) := M_{\mathcal{B}}(v)^T \cdot A \cdot M_{\mathcal{C}}(w)$, für $v \in V$, $w \in W$,

mit $M_{\mathcal{B}}(v)$ = Koordinatenvektor von v bzgl Basis $\mathcal{B}$,
$M_{\mathcal{C}}(w)$ = —— " —— von w bzgl Basis $\mathcal{C}$.

Nach der Definition von ϕ und ψ gilt:

(i) (i,j)te Eintrag von $A_{\beta_A} = \beta_A(v_i, w_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$.

$\Rightarrow A_{\beta_A} = A$ dh. $(\phi \circ \psi)(A) = \phi(\beta_A) = A_{\beta_A} = A$.

Damit gilt $\phi \circ \psi = id$.

(ii) Es ist $\beta_{A_\beta}(v_i, w_j) = e_i^T A e_j = (i,j)$te Eintrag von $A_\beta = \beta(v_i, w_j)$.

Damit stimmen β und β_{A_β} auf einer Basis überein,

und es folgt $\beta_{A_\beta} = \beta$, dh. $(\psi \circ \phi)(\beta) = \psi(A_\beta) = \beta_{A_\beta} = \beta$.

Damit gilt $\psi \circ \phi = id$. #

Wir haben damit gesehen, daß ϕ Isomorphismus ist.

(c) Es gilt wegen β bilinear:

$$\beta\Big(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j w_j\Big) = \sum_{i,j} x_i y_j \, \beta(v_i, w_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j (A_\beta)_{ij}$$

$$\overset{6.5}{=} x^T A_\beta y,$$

mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

6.10 <u>Bem:</u>

(a) Graphisch haben wir:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\substack{\text{Koordinaten-}\\\text{abbildung}\\ M_B \times M_C}"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & K \arrow[d, equal] \\ K^m \times K^n \arrow[r] & K \\ (x,y) \arrow[r, mapsto] & x^T A_\beta y \end{tikzcd}$$

Dieses Diagram ist kommutativ.

(b) Wir schreiben $[\beta]_{B,C}$ für die darstellende Matrix der Bilinearform β bezüglich der Basen B und C von V bzw W. Andere Notation ist $M^B_C(\beta)$. Kein Standard bei Notation.

6.11 Korollar:

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei $\beta \in Bil(V,W)$ mit darstellender Matrix $A := [\beta]$ bezüglich fest gewählter Basen von V und W.

(a) β ist nicht ausgeartet in 1. Variablen
$\Leftrightarrow$ Zeilenrang von A ist gleich $\dim V$.

(b) β ist nicht ausgeartet in 2. Variablen
$\Leftrightarrow$ Spaltenrang von A ist gleich $\dim W$.

Beweis:

(a) Ist $[\beta]_{B,\mathcal{C}} =: A$, so ist $M^{B}_{\mathcal{C}^*}(\beta_1) = A^T$, siehe 6.8.

Es ist β nicht ausgeartet in 1. Variablen
$\overset{6.7}{\Leftrightarrow}$ β_1 injektiv dh. $\operatorname{Ker} \beta_1 = \{0\}$.
$\overset{\text{Rang-Defekt-Thm}}{\Leftrightarrow}$ $\dim V = \dim \operatorname{im} \beta_1 = \dim \operatorname{Span}\{A^T v_1, \dots, A^T v_m\}$
mit Basis $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ von V.
$\Leftrightarrow$ Spaltenrang von $A^T = \dim V$.
$\Leftrightarrow$ Zeilenrang von $A = \dim V$.

(b) Folgt analog. Hierzu muß man zunächst 6.8 für die Abbildung β_2 ausarbeiten. Es gilt dabei $M(\beta_2) = [\beta] = A$ mit geeigneten Basen.
Es ist also β nicht ausgeartet in 2. Variablen
$\overset{6.7}{\Leftrightarrow}$ β_2 ist injektiv dh. $\operatorname{Ker} \beta_2 = \{0\}$.
$\overset{\text{Rang-Defekt-Thm}}{\Leftrightarrow}$ $\dim W = \dim \operatorname{im} \beta_2$
$\Leftrightarrow$ $\dim W =$ Spaltenrang von A.

6.12 Kor: Es ist $\beta \in Bil(V)$ nicht ausgeartet in 1. Variablen
$\Leftrightarrow$ β ist nicht ausgeartet in 2. Variablen
$\Leftrightarrow$ $[\beta]$ ist invertierbar.

Bew: 6.11 + Zeilenrang von A = Spaltenrang von A

6.13 **Bsp** (a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$.
Dann ist $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ Basis von V.
Sei $\beta(x,y) := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
Dann ist die darstellende Matrix von β bezüglich B:

$$A := [\beta]_B := [\beta]_{B,B} = \begin{pmatrix} \beta(v_1,v_1) & \beta(v_1,v_2) & \beta(v_1,v_3) \\ \beta(v_2,v_1) & \beta(v_2,v_2) & \beta(v_2,v_3) \\ \beta(v_3,v_1) & \beta(v_3,v_2) & \beta(v_3,v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach 6.12 ist damit β nicht ausgeartet.
Nach 6.5 ist β symmetrisch (oder nach Definition von β).
Schränken wir die Bilinearform auf Unterräume ein, so kann man nicht vorhersagen, was bezüglich der Eigenschaft "nicht ausgeartet" passiert:
Sei $W := \mathrm{Span}(B_2)$ mit $B_2 = \{v_1, v_2\}$ Basis von W.
Dann ist $[\beta|_W]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit 6.12 folgt, die Bilinearform $\beta|_W$ ist ausgeartet. Hierbei ist $\beta|_W := \beta|_{W \times W}$ siehe 6.6b)

(b) Sei $\gamma(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ mit V, B und B_2 wie in (a).
Dann ist $[\gamma]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $[\gamma|_W]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

In diesem Fall ist nach 6.12 also
- γ ausgeartet auf $V = \mathbb{R}^3$
- γ nicht ausgeartet auf W.

6.14 **Bem**: In Bezug auf Symmetrie für $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ gilt:
- β symmetrisch $\Leftrightarrow A = [\beta]$ symmetrisch $(A^T = A)$
- β schief-symmetrisch $\Leftrightarrow A = [\beta]$ ist schief-symmetrisch $(A^T = -A)$
- β alternierend $\Leftrightarrow A = [\beta]$ alternierend
  d.h. $A^T = -A$ und $a_{ii} = 0$ für alle i mit $A = (a_{ij})$

wobei wir $A := [\beta]$ bezüglich einer Basis von V.

Beweis: Übung.