6.15 Thm (Transformationsformel für Bilinearformen)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V,W)$. Seien $A = [\beta]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ und $A' = [\beta]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$.
Dann gilt:

$$[\beta]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)^T \cdot [\beta]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(id_W).$$

Beweis: Wir betrachten den Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{id} & V & \xrightarrow{\beta_1} & W^* & \xrightarrow{id_{W^*}} & W^* \\ \text{mit Basen } \mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{C}^* & & \mathcal{C}'^* \end{array}$$

duale Basen zu $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$.

Dann folgt mit $id_{W^*} = id_W^*$

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\beta_1) \overset{LAI}{=} M_{\mathcal{C}'^*}^{\mathcal{C}^*}(id_W^*)\, M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}}(\beta_1)\, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$$

$$\overset{5.30}{=} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(id_W)^T\, M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}}(\beta_1)\, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$$

Wir transponieren diese Gleichung und erhalten mit Bemerkung 6.8:

$$[\beta]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)^T\, [\beta]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(id_W).$$

6.16 Korollar: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V,V)$.
Dann ist

$$[\beta]_{\mathcal{B}'} = P^T\, [\beta]_{\mathcal{B}} \cdot P$$

mit $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)$ und $[\beta]_{\mathcal{B}} := [\beta]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, $[\beta]_{\mathcal{B}'} := [\beta]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$.

6.17 Bem: Seien $A, B \in M_n(K)$.

Zwei Matrizen A und B heißen kongruent, geschrieben $A \simeq B$, falls es eine invertierbare Matrix $P \in GL_n(K)$ gibt mit $B = P^T A P$. Kongruenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation. Das Problem der Klassifikation von Bilinearformen auf einem n-dimensionalen K-Vektorraum entspricht also dem Problem durch ein geeignetes Repräsentantensystem die Kongruenzklassen von $n \times n$-Matrizen zu beschreiben. Dieses Normalformenproblem wollen wir hier für symmetrische Bilinearformen lösen.

6.18 Bsp:

Kongruenz von Matrizen und Ähnlichkeit von Matrizen sind verschiedene Konzepte. Wir geben zwei Beispiele:

(a) Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind ähnlich zueinander, aber nicht kongruent:

(i) Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

also $PA = BP$, bzw $PAP^{-1} = B$.

Also sind A und B ähnlich.

(ii) Die Matrix A ist symmetrisch: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$.

Im Allgemeinen gilt: Sei A symmetrisch, $P \in GL_n(K)$ mit $B = P^T A P$. Dann ist

$$B^T = (P^T A P)^T = P^T A^T (P^T)^T = P^T A P = B$$

Also ist auch B symmetrisch. Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht symmetrisch. Also ist $A \not\simeq B$.

(b) Sei char $k \neq 2,3$. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dann sind A und B kongruent, aber nicht ähnlich:

(i) Wähle $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $P \in GL_2(k)$, da char $k \neq 2$.

mit $P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$.

Also $A \simeq B$.

(ii) Angenommen es existiert $P \in GL_2(k)$ mit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $PA = BP$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $a = 4a$, $c = 0$, $b = 0$, d beliebig

$\Leftrightarrow$ $3a = 0$, $c = 0$, $b = 0$, d beliebig.

Dies impliziert $a = b = c = 0$, also $P \notin GL_2(k)$ ↯.

Also sind $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht ähnlich.

Wir nehmen im Folgenden an, daß V ein K-Vektorraum ist und β eine symmetrische oder schief-symmetrische Bilinearform. Wir definieren das Konzept von Orthogonalität von Vektoren. Die geometrische Bedeutung davon betrachten wir später; sie hängt von Bilinearform β ab.

6.19 Def:

(a) Für $v, w \in V$ ist v orthogonal zu w bezüglich β, falls $\beta(v,w) = 0$ ist. geschrieben $v \perp w$ oder $v \perp_\beta w$,

(b) Sei $M \subseteq V$ Teilmenge. Definiere $M^\perp := M^{\perp_\beta} := \{v \in V \mid w \perp v \ \forall w \in M\}$, genannt Orthogonalraum zu M in V bzgl β.

(c) Man nennt $V^\perp$ das Radikal von V bzgl β.

6.20 **Prop:** Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

(a) $M^\perp \leq V$ für alle $M \subseteq V$ Teilmenge;

(b) $M, M' \subseteq V$ mit $M \subseteq M'$ impliziert $M'^\perp \leq M^\perp$;

(c) Sei $U \leq V$ Unterraum mit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von U.
Dann ist $U^\perp = \{v_1, \dots, v_k\}^\perp$.

(d) $V^\perp = \{v \in V \mid [\beta] \cdot v = 0\}$; insbesondere ist $\dim V^\perp = \dim V - \operatorname{rg}[\beta]$;
(und β ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow$ $[\beta]$ invertierbar).

Beweis:
(a) (i) Da $\beta(w,-)$ linear, ist $\beta(w,0) = 0$.
Damit ist $w \perp 0$ für alle $w \in M$.
Also ist $0 \in M^\perp$.

(ii) Seien $v_1, v_2 \in M^\perp$ und $\lambda \in K$.
$\overset{6.19}{\Longrightarrow}$ Für alle $w \in M$ gilt $w \perp v_1$ und $w \perp v_2$.
$\Rightarrow$ $\beta(w, \lambda v_1 + v_2) = \lambda \beta(w, v_1) + \beta(w, v_2) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.
$\Rightarrow$ $w \perp \lambda v_1 + v_2$.
Also ist $\lambda v_1 + v_2 \in M^\perp$
Damit ist $M^\perp$ Unterraum von V.

(b) Sei $M \subseteq M' \subseteq V$ Teilmengen. Dann ist

$$M'^\perp \overset{6.19}{=} \{v \in V \mid w' \perp v \ \forall w' \in M'\}$$
$$\subseteq \{v \in V \mid w \perp v \ \forall w \in M\} \overset{6.19}{=} M^\perp.$$

(c) Wegen $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq U$ folgt mit (b), daß $U^\perp \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}^\perp$.
Sei umgekehrt $v \in \{v_1, \dots, v_k\}^\perp$. Für alle $u \in U$ gilt dann:

$$\beta(u,v) \overset{5.4(iii)}{=} \beta\Big(\sum_{i=1}^{k} \underbrace{v_i^*(u)}_{\in K} v_i \,,\, v\Big) \overset{\beta \text{ bilin.}}{=} \sum_{i=1}^{k} v_i^*(u)\, \underbrace{\beta(v_i, v)}_{=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} v_i^*(u) \cdot 0 = 0, \text{ dh. } u \perp v \text{ und damit } v \in U^\perp.$$

(d) Es ist $V^{\perp} \overset{6.19b)}{=} \{v \in V \mid w \perp v \ \forall w \in V\}$

$\overset{6.19a)}{=} \{v \in V \mid \beta(w,v) = 0 \ \forall w \in V\}$

$\overset{6.9}{=} \{v \in V \mid M_B(w)^T \cdot [\beta]_B \cdot M_B(v) = 0 \ , \forall w \in V\}$

$\overset{LA\,I}{=} \{v \in V \mid [\beta]_B \cdot M_B(v) = 0\}$

$\Rightarrow \dim V^{\perp} = \dim \operatorname{Ker} [\beta]_B = \dim V - \operatorname{rg} [\beta]_B$,

wobei B Basis von V ist.

Es ist dann β nicht ausgeartet

$\overset{6.3/6.19}{\Leftrightarrow} V^{\perp} = \{0\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{rg} [\beta]_B = \dim V$

$\Leftrightarrow \beta$ invertierbar.

(Vergleiche mit 6.12)

6.21 <u>Bsp:</u>

Sei $\beta : K^2 \times K^2 \to K$ gegeben durch $[\beta]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

dh. $\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1\, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 y_1$.

Es ist $\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, e_1\right) = x_1$

und $\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, e_2\right) = x_1 \cdot 0 = 0$ für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2$

$\Rightarrow$ Das Radikal ist $K^{2\perp} = \{x \mid \beta(x, e_i) = 0,\ i = 1,2\}$

$= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

6.22 **Thm:** Sei $U \leq V$ Unterraum, $\dim V < \infty$.
Dann ist $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$, falls β oder $\beta|_U$ nicht ausgeartet ist.

Beweis:

(a) Sei $B_U := \{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von U, ergänze zu $B_V := \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V.

$$\Rightarrow U^\perp = \{v_1, \dots, v_k\}^\perp$$
$$= \{v \in V \mid v_i \perp v \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$
$$= \{v \in V \mid \beta(v_i, v) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$
$$\overset{5.4(iii)}{=} \{v \in V \mid \beta(v_i, \sum_{j=1}^{n} v_j^*(v) v_j) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$
$$= \{v \in V \mid \sum v_j^*(v)\, \beta(v_i, v_j) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$
$$= \{v \in V \mid (\beta(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \cdot M_B(v) = 0\}$$
$$= \{v \in V \mid A \cdot x = 0\}$$

für $A = (\beta(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$ und $x = M_B(v)$

$\Rightarrow \dim U^\perp = \dim \operatorname{Ker} A = \dim V - \operatorname{rg}(A)$.

$\Rightarrow \dim V = \dim U^\perp + \operatorname{rg}(A)$.

(b) Wir müssen also noch zeigen $\operatorname{rg}(A) = k$.

(i) Ist β nicht ausgeartet, so ist die Gram-Matrix $[\beta]$ invertierbar dh. $\operatorname{rg}[\beta] = n$.

(ii) Ist $\beta|_U$ nicht ausgeartet, so ist $[\beta|_U]$ invertierbar.

$\Rightarrow \operatorname{rg}[\beta|_U] = k$.

In beiden Fällen folgt, daß $\operatorname{rg}(A) = k$ ist.
Also gilt $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.