Für eine partielle Lösung des Normalformen-Problems 6.17 benötigen wir

6.23 **Lemma:** Sei char $K \neq 2$, also $1+1 \neq 0$.

(a) Ist β Bilinearform auf V mit $\beta \neq 0$, dann existiert $v \in V$ mit $\beta(v,v) \neq 0$. Man nennt v anisotrop

(b) Sei $w \in V$ mit $\beta(w,w) \neq 0$. Dann ist
$$V = \mathrm{Span}\{w\} \oplus \{w\}^\perp.$$

Beweis:

(a) Da $\beta \neq 0$, existieren $v, w \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$.
Angenommen $\beta(v,v) = 0 = \beta(w,w)$, dann ist
$$\beta(v+w, v+w) = 2\beta(v,w) \neq 0.$$
$\Rightarrow$ mindestens einer der Vektoren $v, w, v+w$ ist anisotrop.

(b)(i) Sei $\lambda \in K$ mit $\lambda w \in \mathrm{Span}\{w\} \cap \{w\}^\perp$.
$$\Rightarrow 0 = \beta(w, \lambda w) = \lambda \beta(w,w).$$
$$\overset{w \text{ anisotrop}}{\Rightarrow} \lambda = 0.$$
$$\Rightarrow \mathrm{Span}\{w\} \cap \{w\}^\perp = \{0\}.$$

(ii) Schreibe für $v \in V$:
$$v = \frac{\beta(v,w)}{\beta(w,w)} \cdot w + \left(v - \frac{\beta(v,w)}{\beta(w,w)} \cdot w\right)$$
Dann ist $\frac{\beta(v,w)}{\beta(w,w)} \cdot w \in \mathrm{Span}\{w\}$. Außerdem ist
$$\beta\left(v - \frac{\beta(v,w)}{\beta(w,w)} \cdot w, w\right) = \beta(v,w) - \frac{\beta(v,w)}{\cancel{\beta(w,w)}} \cancel{\beta(w,w)} = 0.$$
$$\Rightarrow v - \frac{\beta(v,w)}{\beta(w,w)} \cdot w \in \{w\}^\perp.$$
Mit (i) gilt damit $V = \mathrm{Span}\{w\} \oplus \{w\}^\perp$.

6.24 **Def:** Eine Basis ($B = \{v_1, \dots, v_n\}$) von V heißt <u>Orthogonalbasis</u> bezüglich der symmetrischen Bilinearform β auf V falls $\beta(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j$.
(Basis B heißt <u>Orthonormalbasis</u>, falls zusätzlich noch gilt $\beta(v_i, v_i) = 1$ für $1 \leq i \leq n$.)

6.25 **Thm:** Sei $\operatorname{char} K \neq 2$, also $1+1 \neq 0$.
Ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform β besitzt eine Orthogonalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Bew: Induktion nach n.
Für $\beta = 0$ ist nicht zu zeigen.
Nach Lemma 6.23(a) existiert ein anisotroper Vektor v_1.
Mit Lemma 6.23(b) folgt $V = \operatorname{Span}\{v_1\} \oplus \{v_1\}^\perp$.
Die Einschränkung von β auf $\{v_1\}^\perp$ ist wieder eine symmetrische Bilinearform. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\{v_1\}^\perp$ eine Orthogonalbasis $v_2, \dots, v_n$. Es folgt $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Orthogonalbasis von V

Hiermit folgt eine Lösung des Normalformenproblems 6.17 für symmetrische Bilinearformen:

6.26 **Korollar:** Sei $\operatorname{char} K \neq 2$.
Sei β symmetrische Bilinearform auf V, $\dim V < \infty$.
Dann existiert eine Basis B von V, so daß die zugehörige Gram-Matrix $[\beta]_B$ eine Diagonalmatrix ist.

Bew: Folgt aus 6.25.

6.27 **Bsp:** Sei $\operatorname{char} K = 2$. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist A symmetrisch.
Für $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ gilt $P^T A P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2db \end{pmatrix} = \det P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\det P) A$$

denn $1+1=0$ und $ad+bc = ad-bc$.
Es existiert also kein $P \in GL_2(K)$ mit $P^T A P$ ist Diagonalmatrix.
Dies zeigt Thm 6.25 ist falsch für Körper mit $\operatorname{char} K = 2$.

6.28 <u>Bem</u>: Sei char $k \neq 2$ und k abgeschlossen bezüglich Wurzelziehen. Nach 6.26 existiert eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V, so daß die symmetrische Bilinearform β die darstellende Matrix

$$[\beta]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$$

hat mit $\lambda_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq k$.

Bezeichne $\sqrt{\lambda_i}$ Elemente in k mit $\sqrt{\lambda_i}^2 = \lambda_i$, $1 \leq i \leq k$.

Definiere

$$w_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot v_i & \text{für } 1 \leq i \leq k \\ v_i & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\sqrt{\lambda_i}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ ist. Setze $B' := \{w_1, \dots, w_n\}$. Dies ist Basis von V.

Dann folgt $\beta(w_i, w_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{=0} = 0$ für $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$

und $\beta(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} v_i, v_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \beta(v_i, v_j)$ für $i \neq j$ etc.

und $$\beta(w_i, w_i) = \begin{cases} \beta(v_i, v_i) = 0 & \text{für } i > k \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}^2} \beta(v_i, v_i) = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \lambda_i = 1, & 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Insgesamt folgt

$$[\beta]_{B'} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ mal}}, 0, \dots, 0).$$

Insbesondere gilt dies für $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Basis B' ist ein Beispiel einer Orthogonalbasis, siehe 6.24.
Über den reellen Zahlen gibt es noch die folgende Variante, die als Trägheitssatz von Sylvester bekannt ist:

6.29 **Kor.** (Trägheitssatz von Sylvester)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei β eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann existiert eine Basis B von V mit

$$[\beta]_B = \operatorname{diag}\{\underbrace{1,\dots,1}_{n_+ \text{mal}}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{n_- \text{mal}}, \underbrace{0,\dots,0}_{n_0 \text{mal}}\}.$$

Das Tupel (n_+, n_-, n_0) heißt Trägheit von β, und hängt nur von β ab, nicht von der Basis B.

Beweis:

(a) Wir argumentieren ähnlich zu 6.28, setzen allerdings

$$w_i := \begin{cases} \frac{v_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \text{falls } \lambda_i \neq 0, \\ v_i & \text{falls } \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Dann folgt $[\beta]_{B'} = \operatorname{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ für $\beta_i \in \{0, 1, -1\}$, mit $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$. Umsortieren zeigt die Existenzaussage der Behauptung.

(b) Zu zeigen ist noch, daß das Tupel (n_+, n_-, n_0) eindeutig bestimmt ist, unabhängig von Basis B. Angenommen es existiert eine Basis $\mathcal{C} = \{u_1, \dots, u_n\}$ von V mit darstellender Matrix $[\beta]_{\mathcal{C}} = \operatorname{diag}\{\underbrace{1,\dots,1}_{m_+\text{-mal}}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{m_- \text{mal}}, \underbrace{0,\dots,0}_{m_0 \text{mal}}\}.$

Setze $U := \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_{n_+}\}$ und $W = \operatorname{Span}\{u_{(m_+)+1}, \dots, u_n\}$

Die Vektoren $w_1, \dots, w_{n_+}$ gehören hierbei zu den Diagonalwerten 1,

die Vektoren $u_{(m_+)+1}, \dots, u_n$ —— " —— $\neq 1$.

Wir zeigen $U \cap W = \{0\}$. Sei also $u \in U \cap W$.

Dann ist $u \in U$ und $u \in W$, also existieren $\lambda_i, \mu_i \in K = \mathbb{R}$ mit

$$u = \sum_{i=1}^{n_+} \lambda_i w_i = \sum_{j=(m_+)+1}^{n} \mu_j u_j.$$

$$\Rightarrow \beta(u,u) = \beta\Big(\sum_{i=1}^{n+} \lambda_i w_i , \sum_{j=1}^{n+} \lambda_j w_j\Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n+} \lambda_i \lambda_j \, \beta(w_i, w_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+} \lambda_i^2 \underbrace{\beta(w_i, w_i)}_{=1} \quad , \text{ da } \beta(w_i, w_j) = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$= \sum \lambda_i^2 \geq 0 .$$

Analog ist

$$\beta(u,u) = \beta\Big(\sum_{i=(m+)+1}^{n} \mu_i u_i , \sum_{j=(m+)+1}^{n} \mu_j \mu_j\Big)$$

$$= \sum_{i,j} \mu_i \mu_j \, \beta(u_i, u_j)$$

$$= \sum_{i=(m+)+1}^{n} \mu_i^2 \underbrace{\beta(u_i, u_i)}_{\in \{0,-1\}} \leq 0.$$

Es folgt $\beta(u,u) = 0$.

$\Rightarrow \sum \lambda_i^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_i = 0$ für $1 \leq i \leq n+$

$\Rightarrow u = 0.$

Damit $U \cap W = \{0\}$. Es folgt:

$n = \dim V \geq \dim U \oplus W = \dim U + \dim W$

$= n_+ + (n - m_+)$

$\Rightarrow m_+ \geq n_+$.

Vertauscht man die Rolle der Basisvektoren bei der Definition von U und W, so erhält man $n_+ \geq m_+$. Also gilt $n_+ = m_+$. Ersetzt man β durch $-\beta$ erhält man $n_- = m_-$

Aus $(n+) + (n-) + n_0 = n = (m+) + (m-) + m_0$ folgt $n_0 = m_0$.

6.30 Bem: Auch alternierende Bilinearformen haben eine schöne Normalform: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und β eine alternierende Bilinearform auf V. Dann existiert eine Basis B von V, so daß

$$[\beta]_B = \operatorname{diag}(A, \dots, A, 0, \dots, 0)$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

Alternierende Bilinearformen sind immer schief-symmetrisch. Die Umkehrung gilt auch, falls $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist. Also macht dies auch eine Aussage zur Normalform von schief-symmetrischen Bilinearformen.

6.31 Bem: Warum sind Orthogonalbasen von Interesse?

Sei V ein K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform β. Sei $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ Orthogonalbasis von V.

(a) Dann ist die darstellende Matrix $[\beta]_B$ von besonders schöner Gestalt: Wegen $\beta(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ ist

$$[\beta]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i := \beta(v_i, v_i)$, $1 \leq i \leq n$. Entsprechend vereinfacht sich die Bilinearform:

Sei $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ mit $x_i, y_i \in K$.

Dann gilt

$$\beta(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{=0 \text{ für } i \neq j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$$

Insbesondere ist $\beta(v,v) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$, Summe von skalierten Quadraten.

(b) Ist β nicht ausgeartet, dann ist $\beta(v_i, v_i) = \lambda_i \neq 0$, für $1 \leq i \leq n$. Sei $v \in V$. Dann ist der Koordinatenvektor von v einfach zu bestimmen:

Angenommen $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ mit $x_i \in K$.

Es ist
$$\beta(v, v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \beta(v_j, v_i) = x_i \beta(v_i, v_i) = x_i \lambda_i$$

$\Rightarrow x_i = \lambda_i^{-1} \beta(v, v_i)$.

(c) Sei $U \leq V$ Unterraum, $\dim U = d$, $\dim V = n$.
Sei weiterhin β nicht ausgeartet, und
sei $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(i) Nach 6.20 ist $U^\perp \leq V$, also $U + U^\perp = U \oplus U^\perp \leq V$.
Mit ~~Prop~~ 6.22 folgt $V = U \oplus U^\perp$.

(ii) Sei $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_d\}$ eine Orthogonalbasis von U,
also bezüglich $\beta|_U$. Angenommen $\beta(u_i, u_i) = 0$
~~Da~~ auch $\beta(u_i, u_j) = 0$ für $i \neq j$, folgt aus
der Linearität in der 2. Variablen $\beta(u_i, u) = 0$,
für alle $u \in U$. Damit gilt $u_i \in U \cap U^\perp = \{0\}$ ↯
Also gilt $\beta(u_i, u_i) \neq 0$.

(iii) Schreibe $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U^\perp$.
Nach (b) gilt:
$$u = \sum_{i=1}^{d} \beta(u_i, u_i)^{-1} \beta(u, u_i) u_i$$
Es ist $\beta(v, u_i) = \beta(u+u', u_i) = \beta(u, u_i) + \underbrace{\beta(u', u_i)}_{=0, \text{ da } u' \in U^\perp}$
$$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{d} \beta(u_i, u_i)^{-1} \beta(v, u_i) u_i. \quad (*)$$

Damit läßt sich die Zerlegung $v = u + u'$ mit
Hilfe der Orthogonalbasis von U sehr leicht
bestimmen, durch Formel (*).

In Beispiel 6.27 haben wir gesehen: Es gibt nicht
immer Orthogonalbasen. In Thm 6.25 haben wir
gesehen, sie existieren immer für symmetrische
Bilinearformen, falls $\operatorname{char} K \neq 2$. Wie konstruieren
wir Orthogonalbasen (OGB)?

6.32 <u>Bem</u> (Konstruktion von OGB) Sei char $k \neq 2$.

(a) Sei $A \in M_n(k)$ symmetrisch. Sei $\beta := \beta_A$ Bilinearform, definiert wie in 6.5. Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ OGB von $V = k^n$ bezüglich β. Diese existiert nach 6.26 und 6.14. Definiere $D := \operatorname{diag}(\beta(v_1, v_1), \dots, \beta(v_n, v_n))$ Dann existiert nach 6.16 eine Matrix $P \in GL_n(k)$ mit $P^T A P = D$.

(b) Um die Matrizen P und D zu bestimmen, können wir "gleichzeitig" Zeilen- und Spaltenumformungen anwenden. Elementare Zeilenumformungen von A ergeben sich durch Multiplikation von A von links mit Elementarmatrizen E. Elementare Spaltenumformungen sind Zeilenumformungen von A^T. Es ist $(E A^T)^T = A E^T$, also entsprechen diese Multiplikation von A von rechts mit E^T.
Angenommen A läßt sich durch "simultane" Anwendungen derselben Zeilen- und Spaltenumformungen diagonalisieren. Dann gilt $D = E_s \cdot \ldots \cdot E_1 A E_1^T \cdot \ldots \cdot E_s^T$. Setze $P := E_1^T \cdot \ldots \cdot E_s^T$. Dann ist $P^T = (E_1^T \cdots E_s^T)^T = E_s \cdot \ldots \cdot E_1$.

$\Rightarrow D = P^T A P$.

Das Wort "gleichzeitig" bzw "simultan" ist nicht ganz korrekt – die Umformungen werden wie üblich natürlich hintereinander ausgeführt. Es ist hierbei aber unerheblich, ob zuerst die Zeilen- oder die Spaltenumformung durchgeführt wird.

6.33 Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Dann ist $A^T = A$, also A symmetrisch.
Nach 6.32 existiert $P \in GL_3(\mathbb{R})$ mit $P^TAP =: D$ Diagonalmatrix. Wir konstruieren P und D mit Hilfe von Bem 6.32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: D$$

Nach Linearer Algebra I erhalten wir P, indem wir die obigen Spaltenumformungen auf I_3 anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to -2C_1 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: P$$

Man überprüft leicht $P^TAP = D$.
Setze $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ OGB von $\mathbb{R}^3$ bezüglich β_A,
denn: $\beta_A(v_i, v_j) = v_i^T A v_j$, also $\left(\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3 \end{array}\right) A \left(v_1 | v_2 | v_3\right) = P^TAP = D$;
insbesondere ist also $\beta_A(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$.
Im Allgemeinen: die Spalten von P bilden also eine OGB des zugrundeliegenden Vektorraumes bzgl der zugrundeliegenden symmetrischen Bilinearform.

Übung: Sei $A \in M_n(k)$ symmetrisch. Zeigen Sie mittels elementarer Zeilen- und Spaltenoperationen, daß es $P \in GL_n(k)$ gibt mit P^TAP ist Diagonalmatrix. (Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe für $n=2$. Dann Induktion nach n.)

Mit dem folgenden Algorithmus lassen sich OGB konstruieren:

6.34 Thm (Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren)
Sei $\beta: V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform
mit $\beta(v,v) \neq 0$ für alle $0 \neq v \in V$. (*)
Seien $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig.
Wir definieren $w_1 := v_1$
$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta(v_k, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} \cdot w_i, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Dann gilt:
(a) $\{w_1, \dots, w_n\}$ sind linear unabhängig;
(b) $\beta(w_i, w_i) \neq 0$ und $\beta(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$;
(c) $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_n\}$.

Insbesondere, ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine beliebige Basis von V, so ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine OGB von V.

Beweis: Wir machen Induktion nach n.
Für $n = 1$ ist die Aussage automatisch wahr.
(a) Sei also $n \geq 2$ und die Behauptung bewiesen für $n-1$ Vektoren $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Sei $v_n \in V$ so, daß $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ linear unabhängig ist. Nach Induktionsvoraussetzung seien bereits $\{w_1, \dots, w_{n-1}\} \subseteq V$ konstruiert mit den Eigenschaften (a), (b), (c).
(b) Wir definieren
$$w_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} w_i$$
$$\Rightarrow \quad v_n = w_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\dots) w_i \in \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_n\}$$
$$\Rightarrow \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_n\}$$
Wegen $\dim \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = n$ folgt: $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq V$ linear unabhängig mit $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_n\}$

Insbesondere ist dann wegen der linear Unabhängigkeit $w_n \neq 0$ und nach (*) gilt $\beta(w_n, w_n) \neq 0$.

(c) Wir müssen noch zeigen, daß $\beta(w_k, w_n) = 0$ ist für $1 \leq k \leq n-1$.
Durch Nachrechnen erhalten wir:

$$\beta(w_k, w_n) = \beta\left(w_k, v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} \cdot w_i\right)$$

$$= \beta(w_k, v_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} \cdot \underbrace{\beta(w_k, w_i)}_{\substack{=0 \text{ nach Ind. Vor.} \\ \text{für } k \neq i}}$$

$$= \beta(w_k, v_n) - \frac{\beta(v_n, w_k)}{\beta(w_k, w_k)} \cdot \beta(w_k, w_k)$$

$$= \beta(w_k, v_n) - \beta(v_n, w_k) = 0.$$

Damit gelten (a), (b) und (c) für $\{w_1, \dots, w_n\}$.

6.35 Bsp: Sei $V = \mathbb{R}_n[X]$ Menge der Polynome vom Grad $\leq n$.
Eine Basis von V ist $\mathcal{B} := \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$.
Dann ist $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\beta(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

eine symmetrische Bilinearform (siehe Analysisvorl.)
mit $\beta(f, f) = \int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx = 0$ nur für $f = 0$.
Damit können wir das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt anwenden: Sei $n = 4$
Definiere $v_1 = 1$, $v_2 = X$, $v_3 = X^2$, $v_4 = X^3$.

Wir wenden den Algorithmus aus 6.34 an:

(a) Setze $\underline{\underline{w_1 := 1}}$

Es ist $\beta(w_1,w_1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$.

(b) Es ist $\beta(v_2,w_1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Setze $w_2 := v_2 - \frac{\beta(v_2,w_1)}{\beta(w_1,w_1)} \cdot w_1 = \underline{\underline{X}}$

Es ist $\beta(w_2,w_2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

(c) Es ist $\beta(v_3,w_1) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2/3$

$\beta(v_3,w_2) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0$.

Setze $w_3 := v_3 - \frac{\beta(v_3,w_1)}{\beta(w_1,w_1)} \cdot w_1 - \frac{\beta(v_3,w_2)}{\beta(w_2,w_2)} \cdot w_2$

$= X^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2/3} \cdot X = \underline{\underline{X^2 - \frac{1}{3}}}$.

(d) Es ist $\beta(v_4,w_1) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0$

$\beta(v_4,w_2) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} = 2/5$

$\beta(v_4,w_3) = \int_{-1}^{1} x^5\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^3 dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{12}x^4\right]_{-1}^{1} = 0$

Setze $w_4 = v_4 - \frac{\overbrace{\beta(v_4,w_1)}^{=0}}{\beta(w_1,w_1)} \cdot w_1 - \frac{\overbrace{\beta(v_4,w_2)}^{=2/5}}{\beta(w_2,w_2) = 2/3} \cdot w_2 - \frac{\overbrace{\beta(v_4,w_3)}^{=0}}{\beta(w_3,w_3)} \cdot w_3$

$= X^3 - \frac{3}{5}X$.

Es folgt $\{1, X, X^2 - 1/3, X^3 - \frac{3}{5}X\}$ ist OGB von $\mathbb{R}_3[X]$ bezüglich β.