§7 Skalarprodukte

Bei Vektorräumen über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, nicht aber im Allgemeinen, kann man eine Zusatzstruktur einführen, die es erlaubt Längen, Winkel etc zu definieren. Dabei müssen wir zwischen $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-Vektorräumen entscheiden.

7.1 **Def**: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt auf V ist eine Funktion $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll} (S1) & \langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \\ (S2) & \langle \lambda x, z\rangle = \lambda \langle x,z\rangle \\ (S3) & \langle x,z\rangle = \langle z,x\rangle \\ (S4) & x \neq 0 \Rightarrow \langle x,x\rangle > 0 \end{array}\right\} \quad \forall x,y,z \in V \text{ und } \lambda \in K.$$

Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt als Zusatzdatum heißt euklidischer Raum / Innerer Produktraum.

7.2. **Bem**:

(a) Die ersten beiden Eigenschaften (S1) und (S2) bedeuten, daß die Funktion $\langle -,- \rangle$ in der ersten Variablen linear ist. Zusammen mit Eigenschaft (S3) folgt Linearität in der zweiten Variablen. Damit ist die Funktion eine Bilinearform, siehe 6.1. Eigenschaft (S3) sagt, daß $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform ist.

(b) Neu ist Eigenschaft (S4). Man sagt, daß $\langle -,- \rangle$ positiv definit ist. (S4) verwendet, daß der Körper $\mathbb{R}$ angeordnet ist; deshalb muß die Definition für $\mathbb{C}$ modifiziert werden.

7.3 Beispiele:

(a) Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, für die Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$.
Es ist $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, siehe Bsp 6.5(b) und es gilt
$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ falls nicht alle $x_i = 0$ sind,
(für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$).

(b) Sei $V = C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$
mit $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) \, dx$.
Nach Analysis ist dies eine symmetrische Bilinearform mit
$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 \, dx > 0 \quad \text{für } f \neq 0,$$
weil f stetig ist:
Zu $f \neq 0$ existiert $x_0 \in [a,b]$ mit $|f(x_0)| =: c > 0$.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit: für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap [a,b]$ gilt $|f(x)| > \frac{c}{2}$.
$\Rightarrow f(x)^2 \geq \frac{c^2}{4}$ für $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap [a,b]$, also gilt
$$\int_a^b f(x)^2 \, dx \geq \varepsilon \cdot \frac{c^2}{4} > 0.$$
Hierbei steht $U_\varepsilon(x_0)$ für eine ε-Umgebung von x_0, also für $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Übung: Zeigen Sie $\langle -, - \rangle$ ist symmetrische Bilinearform.

(c) Sei $\langle -,- \rangle$ Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und sei $U \leq V$ Unterraum. Dann ist die Einschränkung von $\langle -,- \rangle$ auf U, also die Funktion

$$\langle -,- \rangle|_{U\times U} : U \times U \to \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt. Beispielsweise könnte man in (b) den Unterraum $U := V \cap \mathbb{R}[X]$ wählen, also die Polynome aus V.

(d) Sei $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $s : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch $s(A,B) := \mathrm{Spur}(A^T B)$.

Da $s(A,B) = \mathrm{Spur}(A^T B) = \mathrm{Spur}((A^T B)^T)$
$= \mathrm{Spur}(B^T A) = s(B,A)$ ist,

folgt s ist symmetrische Bilinearform.

Es gilt $s(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} (A^T)_{ij} B_{ji} \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ji} B_{ji}$$

Damit folgt $s(A,A) = \sum_{i,j} (A_{ji})^2 > 0$ für $A \neq 0$.

Also ist s positiv definit.

Damit ist s ein Skalarprodukt.

(e) Definiere auf $V = \mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ die Form $\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{3} f(i)\, g(i)$, für $f, g \in V$.

Wir behaupten, $\langle -, - \rangle$ ist Skalarprodukt auf V:

(i) Seien $f_1, f_2, g \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(i)\, g(i)$$

$$= \lambda_1 \sum f_1(i) g(i) + \lambda_2 \sum f_2(i) g(i)$$

$$= \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle .$$

Damit ist $\langle -, - \rangle$ linear in 1. Variablen.

(ii) Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist kommutativ, also ist $f(i) g(i) = g(i) f(i)$, $i = 1, 2, 3$, $f, g \in V$.

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(i)\, g(i) = \sum_{i=1}^{3} g(i) f(i) = \langle g, f \rangle .$$

Damit ist $\langle -, - \rangle$ symmetrisch.

(iii) Da $f(i) \in \mathbb{R}$, ist $f(i)^2 \geq 0$ für $i = 1, 2, 3$ und $f \in V$.

$$\Rightarrow \langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(i)^2 \geq 0 .$$

Es gilt hierbei $0 = \langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(i)^2$

$\Leftrightarrow$ $f(i) = 0$ für $i = 1, 2, 3$

$\Leftrightarrow$ $i = 1, 2, 3$ sind jeweils Nullstellen von f.

Ist $f \neq 0$, so ist $\deg f \leq 2$, nach 1.24 hat f höchstens zwei verschiedene Nullstellen. $\lightning$

Also ist $f = 0$. Damit ist $\langle -, - \rangle$ positiv definit.

7.4 Bem: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Eine Bilinearform $\langle -,- \rangle$ auf V heißt

- negativ definit, falls $\langle x,x \rangle < 0$, $\forall x \in V \setminus \{0\}$;
- positiv semidefinit, falls $\langle x,x \rangle \geq 0$, $\forall x \in V$;
- negativ semidefinit, falls $\langle x,x \rangle \leq 0$, $\forall x \in V$;
- indefinit, falls $\langle -,- \rangle$ weder positiv noch negativ semi-definit ist.

(b) Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ hat eine der Eigenschaften aus (a), genau dann, wenn die zugehörige Bilinearform β_A, siehe 6.5, diese Eigenschaft besitzt.

Diese letzte Definition paßt mit dem Basiswechsel bei Bilinearformen zusammen:

7.5 Lemma:

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Sei $P \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $B := P^T A P$. Dann gilt:
A positiv definit $\Leftrightarrow$ B positiv definit.

Beweis:

"$\Rightarrow$":

Für alle $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ gilt nach Voraussetzung $y^T A y > 0$. Wähle $y := Px$. Dann ist:

$$0 < (Px)^T A Px = x^T (P^T A P) x = x^T B x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Beachte $Px \neq 0$ für $x \neq 0$, da P invertierbar.
Also ist B positiv definit.

"$\Leftarrow$": Sei $B = P^T A P$ positiv definit.
Mit $P \in GL_n(\mathbb{R})$, folgt auch $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$.
Nach "$\Rightarrow$" ist dann auch $C := (P^{-1})^T B (P^{-1})$ positiv definit, wobei $C = (P^{-1})^T P^T A P P^{-1}$

$$= (P P^{-1})^T A (P P^{-1}) = A \text{ ist.}$$

7.6 Bsp:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$(x\ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y) \begin{pmatrix} x+y \\ x+4y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + 4y^2$$

$$= (x+y)^2 + 3y^2 \geq 0$$

und es gilt Gleichheit, genau dann, wenn $x+y = 0 = y$, also wenn $x = y = 0$ ist.
Also ist A positiv-definit.

(b) Definiere die symmetrische Bilinearform $\langle -,- \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ durch $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$. Es ist

- $\langle e_1, e_1 \rangle = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 > 0$,
- $\langle e_2, e_2 \rangle = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$.

Damit ist $\langle -,- \rangle$ indefinit.

Es ist $B := \{e_1, 2e_1 + e_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$ mit

- $\langle e_1, e_1 \rangle = 1 > 0$
- $\langle 2e_1 + e_2, 2e_1 + e_2 \rangle = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$.

Auf beiden Basisvektoren ist also $\langle -,- \rangle > 0$, trotzdem ist die Form nicht positiv-definit!

7.7 Bem:

(a) Jede ~~positive~~ definite Bilinearform $<-,->$ auf V ist nicht ausgeartet.

Beweis:

Sei $x \in V^\perp \overset{6.19}{=} \{v \in V \mid <y,v> = 0 \quad \forall y \in V\}$

$\Rightarrow <y,x> = 0, \quad \forall y \in V.$

Setze $y = x$, dann folgt $<x,x> = 0$.

Da $<-,->$ positiv definit ist, folgt $x = 0$.

Also ist $V^\perp = \{0\}$.

$\overset{6.3/6.12}{\Longrightarrow} <-,->$ nicht ausgeartet.

(b) Die Umkehrung von (a) ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist der Minkowski-Raum, siehe Beispiel 6.6 (f). Die dort angegebene Bilinearform ist nicht ausgeartet und nicht positiv-definit.

7.8 Thm:

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $<-,->$ Skalarprod auf V:

So ist für $U \leq V$ Unterraum

$$U \oplus U^\perp = V.$$

Beweis:

Es ist $U^\perp \overset{6.19}{=} \{v \in V \mid <u,v> = 0 \quad \forall u \in U\} \overset{6.20}{\leq} V$ Unterraum.

Also ist $U + U^\perp \leq V$ Unterraum.

Sei $x \in U \cap U^\perp$. Dann ist $<x,x> = 0$.

Mit (S4) folgt $x = 0$. Also $U \oplus U^\perp \leq V$.

Mit 7.7(a) und 6.22 folgt die Behauptung.