In Analogie zu euklidischen Vektorräumen entwickeln wir die Theorie für komplexe Vektorräume.

7.9 Bem: Sei $x = a+bi \in \mathbb{C}$. Dann ist $\bar{x} := a-bi \in \mathbb{C}$ das komplex konjugierte zu $\mathbb{C}$. Es gilt:

$$\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad , \quad \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 ,$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, und $\bar{\bar{x}} = x$. Mit Realteil bezeichnet man hierbei $Re(x) = a = \frac{1}{2}(x+\bar{x})$,

mit Imaginärteil $Im(x) = b = \frac{1}{2}(x-\bar{x})$.

Der Absolutbetrag von x ist $|x| = \sqrt{x \cdot \bar{x}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Es ist $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Re(x) = x \Leftrightarrow Im(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = \bar{x}$.

7.10 Def: Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Eine <u>Sesquilinearform</u> (sesqui = eineinhalbfach) auf V ist eine Abbildung $\langle -,- \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

mit

$$\left.\begin{aligned} \langle x+y, z \rangle &= \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle \\ \langle \lambda x, z \rangle &= \lambda \langle x,z \rangle \end{aligned}\right\} \text{ linear in 1. Variablen}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle x, y+z \rangle &= \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle \\ \langle x, \lambda z \rangle &= \bar{\lambda} \langle x,z \rangle \end{aligned}\right\} \text{ semilinear in 2. Variablen}$$

für alle $x,y,z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

gilt zusätzlich, daß $\langle -,- \rangle$ <u>komplex konjugiert</u> ist, also $\langle x,z \rangle = \overline{\langle z,x \rangle}$ ist, für alle $x,z \in V$, dann heißt $\langle -,- \rangle$ <u>Hermitesche Form</u>.

Eine Hermitesche Form, die positiv-definit ist, also mit $\langle x,x\rangle \gneq 0$ für alle $x \in V\setminus\{0\}$, heißt <u>Skalarprodukt</u> oder <u>inneres Produkt</u> auf V.

Ein Vektorraum V über $\mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt heißt <u>unitärer Raum</u> oder <u>innerer Produktraum</u>.

7.11 <u>Bem:</u>

Wegen $\langle x,x\rangle = \overline{\langle x,x\rangle}$ für alle $x \in V$, folgt, daß $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$ ist. Damit macht es überhaupt erst Sinn zu prüfen, ob $\langle x,x\rangle > 0$ ist für $x \neq 0$.

7.12 <u>Bsp:</u>

(a) Sei $V = \mathbb{C}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Definiere $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x^T \cdot \overline{y}$

mit $\overline{y} := \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$ (also komplex konjugierte Einträge)

Dies ist ein Skalarprodukt. Beachte

$$\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0 \text{ für } x \neq 0.$$

(b) Sei $V = \{f: [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$

Definiere $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ für $f, g \in V$.

Nach Analysis ist dann V ein innerer Produkt-raum. Vergleiche mit Bsp 7.3 (b).

(c) Die Einschränkung eines inneren Produktes von V auf einen Unterraum $U \leq V$ liefert wieder ein inneres Produkt auf U.

7.13 __Bem:__

Definition 7.10 ließe sich genauso für reelle Vektor-räume formulieren. Wir erhalten dann nichts anderes als eine positiv-definite symmetrische Bilinearform. Die Ähnlichkeit der Definitionen im reellen und komplexen Fall legen nahe, daß viele der Ergebnisse sich vom reellen Fall auf den komplexen übertragen lassen bzw halt im komplexen etwas allgemeiner sind. Dies betrachten wir im Rest des Kapitels. Wir schreiben K für den Körper, mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

7.14 __Def/Thm__ (Strukturmatrix/darstellende Matrix)

Sei $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ Sesquilinearform auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-VR V. mit $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis

Sei $A = (\langle v_i, v_j \rangle) \in M_n(\mathbb{C})$ zugehörige darstellende Matrix von V, die zu $\langle -,- \rangle$.

Dann gilt $\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \rangle = (x_1, \dots x_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = x^T A \overline{y}$

mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\overline{y} = (\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n})^T$.

7.15 Bem: Der Beweis von 7.14 folgt wie in Thm 6.9 aus der Linearität in der 1. Variablen und der Semi-linearität in der 2. Variablen:

$$\langle x,y\rangle = \langle \sum_i x_i v_i , y\rangle = \sum_i x_i \langle v_i , \sum_j y_j v_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} \langle v_i, v_j\rangle$$

$$= x^T A \overline{y}.$$

Es gilt hierbei $\langle v_i,v_j\rangle = \overline{\langle v_j,v_i\rangle}$, also $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Also ist $\overline{A}^T = A$, mit $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ komplex konjugierte Matrix zu A.

7.16 Def: Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $\overline{A}^T = A$ heißt hermitesch. Wir schreiben $A^* := \overline{A}^T$.

7.17 Bem: (a) Man sieht leicht: $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $(A\cdot B)^* = B^* A^*$, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, $\det A^* = \overline{\det A}$.

z.B. $\det A^* = \det (\overline{A})^T \overset{LA I}{=} \det \overline{A} \overset{LA I}{=} \overline{\det A}$.

(b) Falls $A \in M_n(\mathbb{R})$, so erhalten wir erneut wie in 6.14 daß $A = A^T$, also A symmetrisch ist.

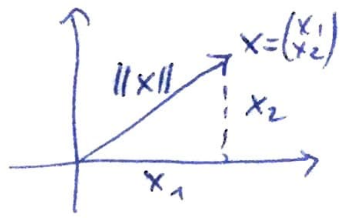
(c) Wie in 6.16 gilt auch für V komplexer innerer Produktraum: Ist A darstellende Matrix von $\langle -,- \rangle$ bezüglich Basis $\{u_1,\dots,u_n\}$ und B darstellende Matrix von $\langle -,- \rangle$ bezüglich Basis $\{v_1,\dots,v_n\}$, dann gibt es eine Matrix $P \in GL_n(\mathbb{C})$ mit $B = \overline{P}^T A P = P^* A P$.

Beweis: Übung

Innere Produkträume sind normierte Vektorräume.
Um dies zu beweisen, benötigen wir zunächst:

7.18 Def Sei V ein innerer Produktraum über K. Definiere $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Wir bezeichnen $|x|$ als die Länge oder Norm oder Betrag von $x \in V$. Oft schreibt man $\|x\|$ oder $|x|$. Falls $|x| = 1$ ist, so heißt x Einheitsvektor oder normierter Vektor.

7.19 Bem: Ist $V = \mathbb{R}^2$ mit Standard-Skalarprodukt, so entspricht das dem üblichen Längenbegriff nach Satz von Pythagoras:



mit $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
$= \sqrt{\langle x,x\rangle}$

7.20 Prop: Sei V ein innerer Produktraum, seien $x, y \in V$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

(a) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(c) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

(d) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis:

(a) Nach (S4) in 7.1 bzw nach 7.10 ist $\langle -,-\rangle$ positiv definit. Also ist $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle > 0$ für $x \neq 0$ und $\langle 0,0\rangle = 0$, da $\langle -,-\rangle$ linear in 1. Variablen. Dies impliziert Beh.

(b) Es ist $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$.
$\Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$.

(c) (i) Man prüft zunächst den Fall $y=0$:

$$|\langle x,0\rangle| = |0| = 0$$

und $\langle 0,0\rangle\langle x,x\rangle = 0\cdot\langle x,x\rangle = 0$.

(ii) Sei also $y\neq 0$. Setze $\overline{\lambda} = \dfrac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle} \in \mathbb{C}$,

(wobei für $K=\mathbb{R}$ ist natürlich $\lambda\in\mathbb{R}$).

Es gilt mit 7.10:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \langle x,\lambda y\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y,\lambda y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \overline{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle \\
&\overset{7.9}{=} \langle x,x\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle\right) + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \\
&\overset{\lambda \text{ einsetzen}}{=} \langle x,x\rangle - \frac{2|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \\
&= \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}
\end{aligned}$$

Also ist $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.
Aufgrund der Positiv-Definitheit von $\langle -,-\rangle$ gilt hierbei Gleichheit genau dann, wenn $x-\lambda y=0$ ist, also $x=\lambda y$.

(d) Es ist $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$\begin{aligned}
&\overset{7.9}{\underset{7.10}{=}} \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) + \langle y,y\rangle \\
&\leq \langle x,x\rangle + 2\,|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \\
&\overset{(c)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Da $\sqrt{\ }$ monoton und $\|-\|\geq 0$ folgt $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

7.21 Bsp:

Indem wir spezielle Vektorräume und Skalarprodukte wählen, erhalten wir interessante Spezialfälle/Ungleichungen aus Thm 7.20c):

(a) Seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

Um dies zu beweisen, wählen wir $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt, siehe 6.5.

Sei $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Dann sagt Thm 7. :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| = \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

(b) Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt:

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

Wähle in (a) den Vektor $y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $b_i = 1$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann ist $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$, und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz sagt $n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$.

Hierbei gilt Gleichheit nach 7. , genau dann, wenn $\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ linear abhängig sind, also wenn gilt $x = \lambda y$. Dies ist äquivalent zu $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Es folgen Anmerkungen zu 7.20:

7.22 Bem:

(a) Einen K-Vektorraum mit einer Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit den Eigenschaften 7.20 (a)(b)(d) heißt ein normierter Raum; die Abbildung $\|\cdot\|$ wird als Norm bezeichnet.

In 7.20 haben wir also gesehen: Ist V ein innerer Produktraum, so induziert $\langle -,- \rangle$ durch $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ eine Norm, und V ist damit ein normierter Vektorraum.

(b) ~~Wird~~ Wird eine Norm von einem Skalarprodukt induziert, so läßt sich dieses aus der Norm rekonstruieren mittels (Polarisierung):

(i) reelle Fall: $\langle x,y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

(ii) komplexe Fall: $\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

(c) Nicht jede Norm-Abbildung wird von einem Skalarprodukt induziert. Beispielsweise sei $\|\cdot\|_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\binom{x_1}{x_2} \mapsto |x_1| + |x_2|$ gegeben.

Dies ist eine Norm. Angenommen $\langle -,- \rangle_1$ induziert $\|\cdot\|_1$. Wähle $x = \binom{1}{1}$ und $y = \binom{-1}{1}$. Dann gilt nach (b):

$\langle x,y \rangle_1 = \frac{1}{2}\left(2^2 - 2^2 - 2^2\right) = -2$

$\langle x,-y \rangle_1 = \frac{1}{2}\left(\|\binom{2}{0}\| - \|\binom{1}{1}\| - \|\binom{1}{-1}\|\right) = \frac{1}{2}\left(2^2 - 2^2 - 2^2\right) = -2.$

$\Rightarrow -\langle x,y \rangle_1 \neq \langle x,-y \rangle_1$. $\lightning$ $(2 \neq -2)$

Also ist $\|\cdot\|_1$ nicht durch $\langle -,- \rangle_1$ induziert.