§ 8 Adjungierte Abbildungen

In diesem Kapitel geht es um die linearen Abbildungen von endlich-dimensionalen inneren Produkträumen V über einem Körper K mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

8.1 Thm/Def: Sei V ein endlich-dimensionaler innerer Produktraum. Sei $T: V \to V$ linear. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $T^*: V \to V$ mit $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle$, für alle $u, v \in V$.

8.2 Bem: Es ist sowohl bei der dualen Abbildung als auch hier üblich einen * an die Abbildung zu machen. Man erkennt aus dem Zusammenhang, um welche Abbildung es sich handelt. Die Abbildung in Thm 8.1 heißt adjungierte Abbildung

8.3 Beweis zu 8.1:

(a) Die Abbildung $V \to K$, $u \mapsto \langle Tu, v \rangle$ ist linear, da T linear und $\langle -, - \rangle$ linear in 1. Variablen. Nach 7.32 existiert ein $w \in V$ mit $\langle T(-), v \rangle = \langle -, w \rangle$, also mit $\langle Tu, v \rangle = \langle u, w \rangle$ für alle $u \in V$. Vektor $w \in V$ ist nach 7.32 eindeutig durch die obige lineare Abbildung bestimmt. Wir definieren $T^*: V \to V$ durch $T^* v := w$. Abbildung T^* ist also wohldefiniert.

(b) Wir zeigen T^* ist linear: Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Dann gilt aufgrund der Definition von T^* und weil $\langle -, - \rangle$ bilinear bzw sesquilinear ist:

$$\langle u, T^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)\rangle = \langle Tu, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle$$
$$= \bar{\alpha}_1 \langle Tu, v_1\rangle + \bar{\alpha}_2 \langle Tu, v_2\rangle$$
$$= \bar{\alpha}_1 \langle u, T^* v_1\rangle + \bar{\alpha}_2 \langle u, T^* v_2\rangle$$
$$= \langle u, \alpha_1 T^* v_1 + \alpha_2 T^* v_2\rangle, \ \forall u \in V.$$

Gilt $\langle u, w_1\rangle = \langle u, w_2\rangle$ für alle $u \in U$, so folgt $w_1 = w_2$, denn $\langle u, w_1 - w_2\rangle = 0$ für alle $u \in U$ und $\langle -,-\rangle$ positiv definit impliziert $\langle -,-\rangle$ nicht ausgeartet, also $w_1 - w_2 = 0$, siehe 7.7 bzw 7.31.
Die Rechnung oben impliziert also

$$T^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T^* v_1 + \alpha_2 T^* v_2,$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und $v_1, v_2 \in V$. Damit ist T^* linear.

8.4 Bsp:

(a) Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt: $\langle u, v\rangle = u^T v$, für $u, v \in V$. Sei $T: V \to V, v \mapsto Av$, für $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Dann ist $T^*(v) = A^T v$, denn:

$$\langle Tu, v\rangle = \langle Au, v\rangle = (Au)^T \cdot v = (u^T A^T) v$$
$$= u^T (A^T v) = \langle u, A^T v\rangle,$$

für alle $u, v \in V$.

(b) Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = u^T \bar{v}$, für $u, v \in V$. Sei $T: V \to V, v \mapsto Av$, für $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Dann ist $T^*(v) = \bar{A}^T v$. Der Beweis ist wie in (a).

Wir sammeln Eigenschaften adjungierter Abbildungen. Für die adjungierten Abbildungen gilt:

8.5 **Prop**: Seien $S: V \to V$ und $T: V \to V$ linear.

Dann ist

(a) $(S+T)^* = S^* + T^*$,

(b) $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$,

(c) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$,

(d) $S^{**} = S$.

Bem: In (b) gilt im reellen Fall natürlich $\bar{\lambda} = \lambda$, also $(\lambda S)^* = \lambda S^*$, $\lambda \in K$.

Beweis: Wir zeigen (b) und (c). Der Rest ist Übungsaufgabe.

(b) Für $u, v \in V$ gilt

$$\langle (\lambda T)(u), v \rangle = \lambda \langle Tu, v \rangle = \lambda \langle u, T^* v \rangle$$
$$= \langle u, \bar{\lambda} T^* v \rangle = \langle u, (\bar{\lambda} T^*)(v) \rangle.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung in 8.1 folgt

$$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*.$$

(c) Für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\langle (S \circ T) u, v \rangle = \langle S(Tu), v \rangle = \langle Tu, S^* v \rangle$$
$$= \langle u, T^*(S^* v) \rangle = \langle u, (T^* \circ S^*)(v) \rangle.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung in 8.1 folgt:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

8.6 <u>Bem</u>: Mit Proposition 8.5 folgt: Ist $f \in K[X]$,
so ist $f(T)^* = f(T^*)$ falls $K = \mathbb{R}$
$f(T)^* = \bar{f}(T^*)$ falls $K = \mathbb{C}$,
wobei falls $f = \sum a_i X^i$, dann ist $\bar{f} := \sum \bar{a}_i X^i$.

8.7 <u>Thm</u>: Sei $T: V \to V$ linear für V endl. diml. innerer Produktraum. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Seien A und A^* die darstellenden Matrizen zu T und T^* bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_n\} = B$.
$\Rightarrow A^* = \bar{A}^T$.

<u>Beweis</u>: Nach Def ist $A := (a_{ij}) := M_B(T)$.
Es ist also $Te_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, nach LAI
Sei $A^* := (b_{ij}) = M_B(T^*)$, dh. nach LAI: $T^* e_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i$
Nach 8.1 ist $\langle Te_p, e_q \rangle = \langle e_p, T^* e_q \rangle$, $1 \le p, q \le n$.
mit $\langle Te_p, e_q \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_{ip} e_i, e_q \rangle = \sum_{i=1}^n a_{ip} \underbrace{\langle e_i, e_q \rangle}_{= \delta_{iq}} = a_{qp}$
und $\langle e_p, T^* e_q \rangle = \langle e_p, \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{b_{ij}} \langle e_p, e_i \rangle = \overline{b_{pq}}$.
Also folgt $b_{pq} = \overline{a_{qp}}$, $\forall 1 \le p, q \le n$.
Also gilt $A^* = \bar{A}^T$.

<u>Bem</u>: Beachte, diese Beziehung zwischen A und A^* benötigt, daß dies darstellende Matrizen bezüglich einer Orthonormalbasis sind. Für beliebige Basen ist das im Allgemeinen falsch.

Für Bild und Kern der adjungierten Abbildung gilt:

8.8 Thm: Sei V endlich-dimensionaler innerer Produktraum und $T: V \to V$ linear. Dann gilt:

$$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{im} T)^\perp,$$
$$\operatorname{im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp.$$

Beweis:

(a) Wir benutzen wieder: ~~für~~ $v \in V$: $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in V$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

$\Rightarrow$ Es ist $\operatorname{Ker} T^* \overset{\text{Def}}{=} \{v \in V \mid T^* v = 0\}$
$$= \{v \in V \mid \langle u, T^* v \rangle = 0 \ \forall u \in V\}$$
$$\overset{8.1}{=} \{v \in V \mid \langle Tu, v \rangle = 0 \ \forall u \in V\}$$
$$= \{v \in V \mid \langle w, v \rangle = 0 \ \forall w \in \operatorname{im} T\}$$
$$\overset{7.29}{=} (\operatorname{im} T)^\perp.$$

(b)(i) Sei $v \in \operatorname{im} T^*$, also $v = T^* w$ für ein $w \in V$.
Sei $u \in \operatorname{Ker} T$. Dann ist
$$\langle u, v \rangle = \langle u, T^* w \rangle \overset{8.1}{=} \langle Tu, w \rangle = \langle 0, w \rangle = 0.$$
$\overset{7.29}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{im} T^* \leq (\operatorname{Ker} T)^\perp$

(ii) Wir vergleichen Dimensionen; sei $\dim V =: n$.

$\Rightarrow$ $\dim \operatorname{im} T^* = n - \dim \operatorname{Ker} T^*$ (Rang-Defekt-Thm)
$$\overset{(a)}{=} n - \dim (\operatorname{im} T)^\perp$$
$$\overset{7.30(d)}{=} \dim \operatorname{im} T$$
$$= n - \dim \operatorname{Ker} T \quad \text{(nach Rang-Defekt Thm)}$$
$$\overset{7.30(d)}{=} \dim (\operatorname{Ker} T)^\perp.$$

Mit LA I folgt $\operatorname{im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

8.9 <u>Bsp</u>: Sei $V = \mathbb{R}_1[X]$, Menge der reellen Polynome vom Grad $\leq$ Eins. Auf V sei das innere Produkt $\langle -,- \rangle$ gegeben mit $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$, $f,g \in V$. Sei $D: V \to V$ gegeben durch $Df := f'$, die erste Ableitung. Wir wollen die adjungierte D^* bestimmen. Nach Definition 8.1 ist $D^*: V \to V$ linear.

(1) (a) Sei $\left.\begin{array}{l} f(x) = a_1X + a_0 \\ g(x) = b_1X + b_0 \end{array}\right\}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1$.

$$\Rightarrow \langle Df, g \rangle = \langle a_1, b_1X + b_0 \rangle$$
$$= \int_0^1 a_1(b_1X + b_0)\,dx$$
$$= \frac{a_1b_1}{2}X^2 + a_1b_0X \Big|_0^1$$
$$= \frac{a_1b_1}{2} + a_1b_0.$$

(b) Sei $D^*g = \alpha X + \beta$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir suchen α und β.

~~Haben~~ $\langle f, D^*g \rangle = \langle a_1X + a_0, \alpha X + \beta \rangle = \int_0^1 (a_1X + a_0)(\alpha X + \beta)\,dx$

$$= \int_0^1 (a_1\alpha X^2 + (a_0\alpha + a_1\beta)X + a_0\beta)\,dx$$
$$= \frac{a_1\alpha}{3} + \frac{a_0\alpha + a_1\beta}{2} + a_0\beta$$

(c) Es gilt $\langle Df, g \rangle \overset{8.1}{\underset{!}{=}} \langle f, D^*g \rangle$ für alle $f = a_1X + a_0 \in V$.

- Wähle $\left\{\begin{array}{l} a_0 \neq 0 \\ a_1 = 0 \end{array}\right\}$. Dann gilt: $0 = \frac{a_1b_1}{2} + a_1b_0 = \frac{a_0\alpha}{2} + a_0\beta = a_0\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

  $\Rightarrow 0 = \frac{\alpha}{2} + \beta$, also $\beta = -\frac{\alpha}{2}$.

- Wähle $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{array}\right\}$. Dann gilt: $\frac{b_1}{2} + b_0 = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{12}\alpha$

  $\Rightarrow \alpha = 12\left(\frac{b_1}{2} + b_0\right) = 6b_1 + 12b_0$, $\beta = -3b_1 - 6b_0$.

  d.h. $D^*(b_1X + b_0) = (6X - 3)(b_1 + 2b_0)$

(d) Sei $B := \{1, X\}$ Basis von V.
Dies ist keine Orthonormalbasis bezüglich $\langle -,- \rangle$.

Es gilt $\left.\begin{array}{l} D(1) = 0 \\ D(X) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M_B(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es ist $\left.\begin{array}{l} D^*(1) \overset{(c)}{=} 12X - 6 \\ D^*(X) \overset{(c)}{=} 6X - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow M_B(D^*) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) Alternativ können wir mit einer Orthonormalbasis und Theorem 8.7 arbeiten.

(a) gegeben $B = \{1, X\}$. Wir wenden Gram-Schmidt an, siehe 7.27. Dann ist für $v_1 = 1$, $v_2 = X$:

(i) $\|v_1\|^2 = \int_0^1 1\, dx = X\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \|v_1\| = 1$.

Setze $w_1 := \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = 1$.

(ii) Setze $\tilde{w}_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = X - \left(\int_0^1 x\, dx\right) \cdot 1$

$= X - \frac{1}{2}$

Setze $w_2 := \dfrac{\tilde{w}_2}{\|w_2\|}$ mit $\|w_2\|^2 = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})\, dx = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow w_2 = \dfrac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \dfrac{\sqrt{12}}{1}(X - \frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$.

Also ist $\mathcal{C} := \{1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}\}$ eine Orthonormalbasis von V.

(b) Es ist $\left.\begin{array}{l} D(w_1) = D(1) = 0 \\ D(w_2) = 2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow M_{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\overset{8.7}{\Longrightarrow} M_{\mathcal{C}}(D^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ dh. $D^*(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{w_1}}) = 2\sqrt{3}\, w_2 = 2\sqrt{3}(2\sqrt{3}X - \sqrt{3})$
$= 12X - 6$, vergleiche mit (1),

$D^*(w_2) = 0$.

Beachte $X = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} w_2$. Es folgt $D^*(X) = \frac{1}{2} \underbrace{D^*(w_1)}_{12X-6} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \underbrace{D^*(w_2)}_{=0} = 6X - 3$.