Wir wollen selbstadjungierte lineare Abbildungen betrachten. Es wird sich herausstellen, daß diese diagonalisierbar sind.

8.10 <u>Def</u>: Sei V endlich-dimensionaler innerer Produktraum. Sei $T: V \to V$ linear. Dann heißt T <u>selbstadjungiert</u>, falls $T^* = T$ ist, also falls nach 8.1 gilt:

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle,$$

für alle $u, v \in V$.

8.11 <u>Bsp</u>:

(a) Sei V ein 3-dimensionaler komplexer innerer Produktraum mit Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sei $S: V \to V$ linear mit $Se_1 = e_1$, $S(e_1+e_2) = 2e_1 + 2e_2$, und $S(e_1+e_3) = 0$. Ist S selbstadjungiert?

Es ist

$$\begin{aligned}
\langle Se_2, e_1 \rangle &= \langle S((e_1+e_2) - e_1), e_1 \rangle \\
&= \langle S(e_1+e_2) - S(e_1), e_1 \rangle \\
&= \langle 2e_1 + 2e_2 - e_1, e_1 \rangle \\
&= \langle e_1 + 2e_2, e_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + 2\langle e_2, e_1 \rangle \\
&= 1 + 2 \cdot 0 = 1,
\end{aligned}$$

und $\langle e_2, Se_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 0$.

Also ist S nach 8.10 nicht selbstadjungiert.

(b) Sei $S: V \to V$ linear. Ein wichtiges Beispiel einer selbstadjungierten linearen Abbildung ist $S^* \circ S$ bzw $S \circ S^*$. Mit Prop 8.5 (c), (d) gilt:

$$(S \circ S^*)^* = (S^*)^* \circ S^* = S \circ S^* \text{ und } (S^* \circ S)^* = S^* \circ (S^*)^* = S^* \circ S.$$

Wir sammeln Eigenschaften selbstadjungierter linearer Abbildungen.

8.12 Prop: Sei V endlich-diml. innerer Produktraum, sei $T: V \to V$ selbstadjungierte lineare Abbildung.

(a) Ist $U \leq V$ T-invarianter Unterraum $\Rightarrow$ $U^\perp \leq V$ ist T-invarianter Unterraum.

(b) Alle Eigenwerte von T sind reell.

(c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

Beweis:

(a) Sei $v \in U^\perp$. Dann gilt $\langle u, Tv \rangle \overset{8.10}{=} \langle Tu, v \rangle = 0$ für alle $u \in U$. Also ist $Tv \in U^\perp$ nach 7.29. Damit ist $U^\perp$ ein T-invarianter Unterraum.

(b) Nach 7.27 existiert eine Orthonormalbasis B von V. Sei $A = M_B(T)$. Nach 8.7 ist $M_B(T^*) = \bar{A}^T$. Wegen $T = T^*$ ist also $A = \bar{A}^T$ {konjugiert} symmetrisch. (bzw im reellen symmetrisch).
Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T bzw A, also Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_T bzw χ_A.
$\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$.

Wir nutzen das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$:

$$\langle v, Av \rangle = v^T (\overline{Av}) \underset{\overline{A}^T = A}{=} v^T (\overline{A}^T \overline{v}) = (Av)^T \overline{v} = (\lambda v)^T \overline{v}$$

$$= \lambda\, v^T \overline{v} = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \|v\|^2,$$

und $\langle v, A_{\neq} v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle = \overline{\lambda} \|v\|^2$.

Es folgt $(\lambda - \overline{\lambda}) \underbrace{\|v\|^2}_{>0} = 0$ mit $\|v\|^2 > 0$ wegen $v \neq 0$.

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ dh. λ ist reell.

(c) Sei $Tu = \lambda u$ und $Tv = \mu v$ mit $\lambda \neq \mu$.

$$\Rightarrow \lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle \overset{8.10}{=} \langle u, Tv \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \overline{\mu} \langle u, v \rangle$$

$$\overset{(b)}{=} \mu \langle u, v \rangle, \text{ mit } \lambda \neq \mu.$$

$\Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$.

<u>Bem</u>: Aussage 8.12 (b) bedeutet, daß das charakteristische Polynom χ_T als Produkt linearer Faktoren in $\mathbb{R}[X]$ geschrieben werden kann, (für T selbstadjungiert linear).

8.13 Bsp: Als Hauptresultat in diesem Kapitel wollen wir zeigen, daß selbstadjungierte lineare Abbildungen oder äquivalent dazu symmetrische oder konjugiert symmetrische Matrizen diagonalisierbar sind, und die Diagonalform sich mit Hilfe einer orthogonalen bzw. unitären Matrix realisieren läßt. Bevor wir das tun, hier nochmals Beispiele, um dieses Resultat einzuordnen.

(a) Es gibt nicht symmetrische Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$, die diagonalisierbar sind; z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ hat charakteristisches Polynom $\chi_A = \det\begin{pmatrix} X & -1 \\ 0 & X-1 \end{pmatrix} = X(X-1)$, und damit zwei verschiedene EW, ist also diagonalisierbar.

(b) Die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ ist symmetrisch, ist aber nicht diagonalisierbar; es ist

$$\chi_B = \det \begin{pmatrix} X & -1 \\ -1 & X-1 \end{pmatrix} = X(X-1) - 1$$

$$= X^2 - X - 1 .$$

In $\mathbb{Z}_2$ gilt $\chi_B(0) = -1 = 1 \neq 0$

$\chi_B(1) = -1 = 1 \neq 0 .$

Also ist χ_B irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[X]$ mit $\chi_B = m_B$.

Nach 3.26 ist B nicht diagonalisierbar.

Die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ist symmetrisch und ist diagonalisierbar. Siehe Thm 8.14 bzw Kapitel 2/3.

(c) Die Matrix $C := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ ist symmetrisch, ist aber nicht konjugiert-symmetrisch ($C \neq \overline{C}^T$). Sie ist nicht diagonalisierbar; es ist:

$$\chi_C = \det \begin{pmatrix} X & -i \\ -i & X-2 \end{pmatrix} = X(X-2) - i^2 = X^2 - 2X + 1$$

$$= (X-1)^2 = m_C .$$

Damit hat m_C mehrfache Nullstellen.

Nach 3.26 ist also C nicht diagonalisierbar.

Die erste Formulierung unseres Hauptresultates in §8 ist:

8.14 Thm: Sei V endlich-diml. innerer Produktraum.
Sei $T: V \to V$ selbstadjungierte lineare Abbildung.
$\Rightarrow$ Es existiert eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von T besteht.

Beweis:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von T.
Setze $V_i := \{v \in V \mid Tv = \lambda_i v\}$ Eigenraum zu λ_i, $1 \leq i \leq k$.
Sei $U := V_1 + \dots + V_k \overset{2.36}{=} V_1 \oplus \dots \oplus V_k \leq V$. Damit wird also U von allen Eigenvektoren von T erzeugt.
Insbesondere ist $T(U) \subseteq U$. Nach Prop 8.12(a) ist also $U^\perp \leq V$ auch T-invariant mit $V \overset{7.30}{=} U \oplus U^\perp$.
Angenommen $U^\perp \neq \{0\}$. Setze $W := U^\perp$. Die lineare Abbildung T, eingeschränkt auf W, ist wieder linear mit $T: W \to W$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $T: W \to W$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow \exists w \in W \setminus \{0\}$ mit $Tw = \lambda w$. Wegen $W \subseteq V$ ist dann w auch Eigenvektor von $T: V \to V$. Nach Konstruktion liegen aber alle Eigenvektoren in U. $\lightning$. Also ist $V = U$,
(d.h. V ist direkte Summe seiner Eigenräume.)
$\overset{2.38}{\Rightarrow}$ $T: V \to V$ ist diagonalisierbar.
Nach 7.11 (c) ist V_i endlich-dimensionaler innerer Produktraum, für $1 \leq i \leq k$. Nach 7.27 besitzt also V_i eine Orthonormalbasis B_i, $1 \leq i \leq k$, die dann automatisch nach Konstruktion aus Eigenvektoren besteht. Nach 8.12(c) sind Vektoren aus B_i und B_j für $i \neq j$ orthogonal zueinander.
Also ist $B := \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} B_i$ eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von T besteht.

8.15 Bem: Alternativ mittels Induktion: Zu $T: V \to V$ selbstadjungiert existiert Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, also existiert $0 \neq v \in V$ mit $Tv = \lambda v$. Da $\operatorname{Span}\{v\}$ T-invariant, ist $T|_{\operatorname{Span}\{v\}^\perp} : \operatorname{Span}\{v\}^\perp \longrightarrow \operatorname{Span}\{v\}^\perp$, siehe 8.12, und $T|_{\operatorname{Span}\{v\}^\perp}$ ist selbst-adjungiert.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthonormalbasis $\{e_2, \dots, e_n\}$ aus Eigenvektoren von V für $T|_{\operatorname{Span}\{v\}^\perp}$. Setze $e_1 := \frac{v}{\|v\|}$, dann ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von T, bestehend aus Eigenvektoren.

Aus Thm 8.14 folgt, daß hermitesche Matrizen diagonalisierbar sind:

8.16 Korollar: (2. Formulierung Hauptresultat)

(a) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A^T = A$. Dann existiert eine orthogonal Matrix U (d.h. $U^{-1} = U^T$) mit $U^{-1}AU = D$ Diagonalmatrix

(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $\bar{A}^T = A$. Dann existiert eine unitäre Matrix U (d.h. $U^{-1} = \bar{U}^T$) mit $U^{-1}AU = D$ Diagonalmatrix

Beweis: Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Abb. $T_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$, ist selbstadjungiert linear, wegen $A = A^T$ bzw $A = \bar{A}^T$. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalbasis zu V nach 8.14, bestehend aus Eigenvektoren von T. Setze $U := (v_1 | \dots | v_n)$. Dann ist $U^T \bar{U} = (\langle v_i, v_j \rangle) = I_n$, nach Linearer Algebra I ist also U orthogonal bzw U unitär; nach 2.18 gilt $AU = UD$ mit D Diagonalmatrix, d.h. $U^{-1}AU = D$.

Bem: Man sagt, A ist orthogonal bzw unitär diagonalisierbar.

8.17 Bem: Wir halten aus 8.16 nochmals fest:

(a) $A \in M_n(\mathbb{C})$ invertierbar mit $A^{-1} = \bar{A}^T$
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}^T A = I_n$ $\Leftrightarrow$ $A\bar{A}^T = I_n$ $\Leftrightarrow$ A unitär
$\Leftrightarrow$ Spalten von A sind Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt
$\Leftrightarrow$ Zeilen von A sind Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt.

(b) $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonal
$\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^T$ $\Leftrightarrow$ $A^T A = I_n$ $\Leftrightarrow$ $AA^T = I_n$
$\Leftrightarrow$ Spalten von A sind Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ Zeilen von A sind Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$,
jeweils bezüglich des Standard-Skalarproduktes.

Für unsere dritte Formulierung unseres Hauptresultates benötigen wir:

8.18 Bsp: Sei V endl. diml. innerer Produktraum.
Sei $P: V \to V$ Projektion dh. $P^2 = P$.
Dann ist P selbst-adjungiert
$\Leftrightarrow$ $\operatorname{im} P = \operatorname{Ker} P^\perp$.

Beweis: Setze $U := \operatorname{im} P$, $W := \operatorname{Ker} P$, dh. $Pu = u$ $\forall u \in U$.
Dann ist $V \overset{LAI}{=} U \oplus W$ mit P Projektion auf U, entlang W. Angenommen P selbstadjungiert
$\Rightarrow$ $\langle u, w \rangle = \langle Pu, w \rangle = \langle u, Pw \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$,
für alle $u \in U$, $w \in W$. Also ist $W \subseteq U^\perp$, siehe 7.29,
mit $\dim W = \dim U^\perp$, siehe 7.30 und LAI.
Damit ist $\operatorname{Ker} P = W = U^\perp = (\operatorname{im} P)^\perp$. Mit 7.30 folgt Beh.
Umgekehrt, sei $W = U^\perp$. Zu $v_1, v_2 \in V$ existieren eindeutige
$u_i \in U$ und $w_i \in W$, $i = 1, 2$, mit $v_i = u_i + w_i$.
$\Rightarrow$ $\langle Pv_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 + w_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1 + w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, Pv_2 \rangle$
Also ist P selbstadjungiert.

Die 3. Formulierung des Hauptresultats ist:

8.19 Thm (Spektralsatz)

Sei V endlich-dimensionaler innerer Produktraum.
Sei $T: V \to V$ selbstadjungierte lineare Abbildung.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T
$\Rightarrow$ $\lambda_i \overset{8.12}{\in} \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq k$ und es existieren eindeutige selbst-adjungierte Projektionen $P_i: V \to V$ mit $P_i P_j = 0$ für $i \neq j$
und $\sum_{i=1}^{k} P_i = Id_V$ und $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$.

Beweis: Benutze Notation aus 8.14.
Definiere P_i als Projektion von V entlang $\bigoplus_{j \neq i} V_j$, auf V_i
mit V_i Eigenraum zum Eigenwert λ_i, $1 \leq i \leq k$.
Damit folgt die Behauptung. #

Als Anwendung unseres Hauptresultats 8.14 bzw 8.16
hier noch ein Kriterium für die Definitheit von Matrizen:

8.20 Kor:

Sei $A \in M_n(K)$ hermitesch für $K = \mathbb{C}$
bzw symmetrisch für $K = \mathbb{R}$.

Dann ist A positiv definit $\Leftrightarrow$ $\lambda > 0$ für alle EW λ von A
A negativ definit $\Leftrightarrow$ $\lambda < 0$ — " —
A positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ $\lambda \geq 0$ — " —
A negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ $\lambda \leq 0$ — " —
und A ist indefinit $\Leftrightarrow$ $\exists$ positiver und negativer EW zu A.

Beweis: Wir formulieren im hermiteschen Fall:
Sei A hermitesch; dann existiert T unitär mit $\bar{T}^t A T$
ist Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (nach 8.12)
Eigenwerten von A, siehe 8.16.

Es gilt für $y := \overline{T}^T x = T^{-1} x$ bzw $x = Ty$, $\overline{x}^T = \overline{y}^T \overline{T}^T$;

A ist positiv definit

$\Leftrightarrow$ $\overline{x}^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $(\overline{y}^T \underbrace{\overline{T}^T) A (T}_{}y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ — " —

$\Leftrightarrow$ $\overline{y}$ diag $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $y > 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2 > 0$, für alle $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Angenommen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind positiv. So folgt damit, daß A positiv definit ist.

Umgekehrt, angenommen A ist positiv definit.
Setze $y = e_i$ für $1 \le i \le n$ (Standardbasisvektoren)
$\Rightarrow$ $\lambda_i > 0$ für alle $1 \le i \le n$.
Analog für die anderen Aussagen.

8.21 Bsp: Eine Anwendung von 8.14/8.16 liefert:
Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotent und symmetrisch.
Dann ist $A = 0$, denn:

A symmetrisch $\overset{8.16}{\Rightarrow}$ $\exists$ P orthog. mit $P^{-1} A P = D$ Diagonalmatrix.

$\Rightarrow$ $0 \overset{\text{Vor.}}{=} A^n = P D^n P^{-1}$ für ein n.

$\Rightarrow$ $D^n = 0$.

Aus $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix} = 0$ folgt $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = 0$.

Also ist $A = PDP^{-1} = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$.