Wir beenden die Vorlesung mit orthogonalen beziehungsweise unitären Abbildungen:

8.22 **Def**: Sei V ein endlich-dimensionaler innerer Produktraum. Sei $T: V \to V$ linear. Falls $T^* = T^{-1}$ ist, so heißt T
- orthogonal, falls $K = \mathbb{R}$,
- unitär, falls $K = \mathbb{C}$.

8.23 **Prop**: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $T^* = T^{-1}$ dh. T orthogonal oder unitär;

(b) T erhält das innere Produkt: $\langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle$, für alle $u, v \in V$.

(c) T erhält Längen: $\|v\| = \|Tv\|$, für alle $v \in V$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Es ist $\langle Tv, Tw \rangle \overset{8.1}{=} \langle v, T^* \circ Tw \rangle \overset{(a)}{=} \langle v, w \rangle$, für alle $v, w \in V$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Es ist $\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle v, T^* Tw \rangle$, für alle $v, w \in V$. Also ist $(T^* \circ T)w = w$, $\forall w \in V$, denn $\langle -, - \rangle$ ist nicht-ausgeartet, siehe 7.31. Es folgt $T^* \circ T = id_V$. Mit LA I folgt $T^* = T^{-1}$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Es ist $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle \overset{(b)}{=} \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2$ für alle $v \in V$. Damit folgt (b) $\Rightarrow$ (c). Für die Umkehrung benutze 7.22 (b).

8.24 Prop: Sei B Orthonormalbasis von V. Sei $T: V \to V$ orthogonal oder unitär. Dann ist $M_B(T)$ orthogonale bzw unitäre Matrix, siehe 8.17.

Beweis: Sei $A = M_B(T)$. Dann ist

$$A^{-1} = M_B(T)^{-1} \overset{LAI}{=} M_B(T^{-1}) \overset{8.22}{=} M_B(T^*) \overset{8.7}{=} \overline{M_B(T)}^T = \bar{A}^T.$$

$\overset{8.17}{\Rightarrow}$ A ist orthogonal bzw. unitär.

8.25 Bem: Eine lineare Abbildung $T: V \to V$ mit $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ für alle $u, v \in V$, also eine Abbildung T, die die Längen erhält, nennt man eine Isometrie. Die Isometrien von V bilden eine Gruppe bezüglich Komposition von Abbildungen.

(a) Ist T Isometrie, also $\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle$, $\forall v, w \in V$, so ist T invertierbar nach 8.23 mit

$$\langle T^{-1}v, T^{-1}w \rangle = \langle TT^{-1}v, TT^{-1}w \rangle = \langle v, w \rangle \; \forall v, w \in V.$$

Also ist T^{-1} Isometrie.

(b) Seien S, T Isometrien von V. Dann ist

$$\langle (S \circ T)v, (S \circ T)w \rangle = \langle S(Tv), S(Tw) \rangle \overset{S \text{ Iso}}{=} \langle Tv, Tw \rangle$$

$$\overset{T \text{ Iso}}{=} \langle v, w \rangle, \; \forall v, w \in V.$$

Also ist $S \circ T$ Isometrie.

Ist $K = \mathbb{R}$ so heißt diese Gruppe orthogonale Gruppe, $O(V)$, ist $K = \mathbb{C}$, so heißt sie unitäre Gruppe $U(V)$.
Man schreibt auch $O(\mathbb{R}^n)$ oder $O(n, \mathbb{R})$ oder $O_n(\mathbb{R})$. Analog für $U(V)$.

8.26 Def: Wir definieren die folgenden Gruppen:

$O(n) := O_n := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^TA = I_n = A\cdot A^T\}$ orthogonale Gruppe,

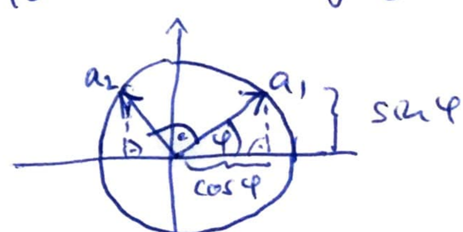
$U(n) := U_n := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^TA = I_n = A\bar{A}^T\}$ unitäre Gruppe,

$SO(n) := SO_n := \{A \in O_n \mid \det A = 1\}$ spezielle orthogonale Gruppe

$SU(n) := SU_n := \{A \in U_n \mid \det A = 1\}$ spezielle unitäre Gruppe.

Man sieht leicht: Dies sind Untergruppen von $GL_n(\mathbb{R})$ bzw $GL_n(\mathbb{C})$.

8.27 Bsp: Orthogonale bzw unitäre Abbildungen erhalten Längen nach 8.23, und Winkel, siehe 7.34, 8.23 im Fall $K=\mathbb{R}$ bzw Orthogonalität im Fall $K=\mathbb{C}$. Wir können Sie uns entsprechend geometrisch vorstellen.
Eine Matrix $A=(a_1|a_2)\in O_2$ ist durch $a_1 \perp a_2$ und $\|a_1\| = 1 = \|a_2\|$ gegeben. Siehe 8.17.
Also liegt a_1 auf dem Einheitskreis, und a_2 entsteht aus a_1 durch Drehung um 90° im oder gegen den Urzeigersinn.

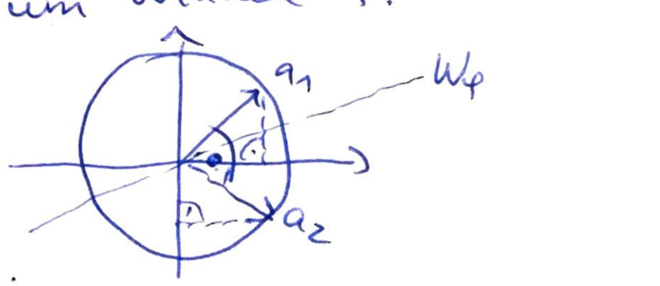


(a) Drehung gegen Urzeigersinn:

Es ist also $a_1 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ und $a_2 = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$.

Damit ist $A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ mit $\det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Die Abbildung T_A ist also $\left\{\begin{matrix} e_1 \mapsto a_1\\ e_2 \mapsto a_2\end{matrix}\right\}$. Dies ist eine Drehung um den Ursprung um Winkel φ.



(b) Drehung ~~mit~~ Urzeigersinn:

Hier ist $A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$

mit $\det A = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1$.

Hier ist $T_A : \left\{\begin{matrix} e_1 \mapsto a_1\\ e_2 \mapsto a_2\end{matrix}\right\}$ eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden W_φ von Winkel φ.

8.28 **Prop**: Sei V innerer Produktraum, endlich-dimensional
Sei $T: V \to V$ orthogonal oder unitär.

(a) T bildet Orthonormalbasis auf Orthonormalbasis ab.
(b) Ist λ Eigenwert von T, so gilt $|\lambda| = 1$.
(c) Es ist $|\det T| = 1$.

Beweis:

(a) Nach 8.22 ist T Isomorphismus. Mit LAI und 8.23 folgt Beh.

(b) Sei $0 \neq v \in V$ Eigenvektor zum EW λ.
$\Rightarrow \langle v, v\rangle \overset{8.23}{=} \langle Tv, Tv\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda \cdot \bar{\lambda} \langle v, v\rangle$
$\overset{v \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda\bar{\lambda} = 1$, also $|\lambda| = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}} = 1$.

(c) Es ist $\det T = \det M_B(T) =: A$ mit $A\bar{A}^T = I_n$
$\Rightarrow 1 = \det I_n \overset{LAI}{=} \det A \cdot \det(\bar{A}^T)$
$\overset{LAI}{=} \det A \cdot \det \bar{A} \overset{LAI}{=} \det A \cdot \overline{\det A}$
$= |\det A|^2$.
Also ist $|\det T| = 1$.

8.29 **Def**: Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt <u>normal</u>, falls $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$ ist. Analog heißt $T: V \to V$ <u>normal</u>, falls $T^* \circ T = T \circ T^*$ ist, mit V innerer Produktraum über $K = \mathbb{C}$.

Hermitesche Matrizen sind beispielsweise normal; hier gilt $A\bar{A}^T = I_n = \bar{A}^T A$.

Ohne allzu viel weiteren Aufwand gilt im unitären VRV:

8.30 Thm: (Hauptsatz über normale Matrizen / Abb.)

(a) Genau dann ist A normal, wenn es im $\mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A gibt.

(b) Genau dann ist $T: V \to V$ normal, wenn V eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren von T hat, d.h. ~~mit~~ $M_B(T)$ Diagonalmatrix. Nach 8.28 haben die Diagonaleinträge von $M_B(T)$ Betrag 1.

8.31 Korollar:
Unitäre Endomorphismen sind diagonalisierbar mit Diagonaleinträgen vom Betrag 1.

8.32 Bem: Sei $T: V \to V$ orthogonal ~~bzw~~ A orthogonal. Orthogonale Matrizen müssen keine reellen Eigenwerte haben, siehe beispielsweise Drehungen im $\mathbb{R}^2$. Es gibt zwei Fälle: Ist χ_T bzw χ_A Produkt von Linearfaktoren in $\mathbb{R}[X]$, so gilt Thm 8.31 auch im reellen Fall. Insbesondere sind dann die Eigenwerte 1 oder -1. Andernfalls gilt:

8.33 Thm: Ist V endlich-dimensional euklidisch, und $T: V \to V$ orthogonal, so existiert eine Orthonormalbasis B von V mit

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & \boxed{B_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{B_t} \end{pmatrix}$$

mit $B_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$

mit $\alpha_i \in (0, 2\pi)$, $1 \le i \le t$.
$\alpha_i \neq \pi$

Ohne Beweis. Siehe Ringel, Lineare Algebra II, SS2009, Teil 5.