Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

1. Vortragsübung
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020
14.05.2020

Aufgaben zu Eigenwerten und Eigenvektoren

V1.1. Aufgabe. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume:

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

V1.2. Aufgabe. Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$ eine Matrix. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.

(b) Ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 für ein $\lambda \in K$, so ist λ ein Eigenwert von A.

(c) Ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 für ein $\lambda \in K$, so besitzt A den Eigenwert λ oder den Eigenwert $-\lambda$.

(d) Besitzt A^2 einen Eigenwert, so besitzt A ebenfalls einen.

V1.3. Aufgabe (Bonusaufgabe). Sei $T : \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R})$ der Endomorphismus auf dem Vektorraum der reellen Folgen, der durch $T(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $b_n := a_{n+1}$ gegeben ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von T und die zugehörigen Eigenräume.

Aufgaben zur Diagonalisierbarkeit von Matrizen

V1.4. Aufgabe. Prüfen Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

auf Diagonalisierbarkeit. Falls möglich geben Sie eine Matrix $P \in Gl_n(\mathbb{R})$, sodass $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.