Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

3. Vortragsübung
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020
20.05.2020

Aufgaben zu Quotienträume

V3.1. Aufgabe. Seien $V = \mathbb{R}^2$ und $U = Span((0,1)^T)$:

(a) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von V/U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von V/U. Ist sie eindeutig?

V3.2. Aufgabe. Seien $T_{A_i} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die linearen Abbildungen mit

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie den Isomorphiesatz (Thm. 3.9) auf T_{A_i} an.

V3.3. Aufgabe. Seien K ein Feld ($char(K) \neq 2$) und $T : M_n(K) \to M_n(K)$ die lineare Abbildung gegeben durch $A \mapsto A - A^T$.

(a) Wenden Sie den Isomorphiesatz (Thm. 3.9) auf T an.

(b) Beweisen Sie, dass $M_n(K)/Sym_n(K) \simeq Alt_n(K)$.

V3.4. Aufgabe. Beweisen Sie den zweiten Isomorphiesatz für Vektorräume (wenden Sie den Isomorphiesatz (Thm. 3.9) an).

Thm. (der zweite Isomorphiesatz): Seien K ein Feld, V ein K-Vektorraum und V_1, V_2 zwei Unterräume von V. Dann ist

$$T : V_2/(V_1 \cap V_2) \to (V_1 + V_2)/V_1 \text{ gegeben durch}$$

$$v + (V_1 \cap V_2) \mapsto v + V_1$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.