Invariante Unterräume und vollständige Fahnen

V1.1. Aufgabe. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Beweisen Sie: Ist $U \leq V$ ein T-invarianter Unterraum von V, so gibt es entweder einen Eigenvektor $v \in U$ von T oder $U = 0$.

V1.2. Aufgabe. Führen Sie für jede der reellen Matrizen

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

folgende Aufgaben durch

(a) Bestimmen Sie alle A-invarianten Unterräume.

(b) Geben Sie falls möglich eine vollständige Fahne bezüglich A an.

(c) Ist A trigonalisierbar? Falls ja geben Sie eine Dreiecksgestalt von A mit zugehöriger Basis an.

V1.3. Aufgabe. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\partial : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X], \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$ die Ableitungsabbildung auf dem Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Bestimmen Sie alle ∂-invarianten Unterräume von $\mathbb{C}_n[X]$.

Haupträume und Hauptraumzerlegung

V1.4. Aufgabe. Sei K ein Körper und $A \in M_7(K)$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für folgende Körper K die Hauptraumzerlegung von A durch Angabe entsprechender Basen $B_1, \ldots, B_r$ der Haupträume und bestimmen Sie $M_B(A)$ für die Basis $B := \bigcup_{i=1}^r B_i$ von K^7.

(a) $K = \mathbb{Q}$

(b) $K = \mathbb{Z}_7$