Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

9. Vortragsübung
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020
09.07.2020

Frobenius-Normalform

V9.1. Aufgabe. Berechnen Sie eine Frobenius-Normalform der Matrix $A \in M_7(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -1 & -8 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

und eine zugehörige Transformationsmatrix P.

V9.2. Aufgabe. Bestimmen Sie alle Ähnlichkeitsklassen von reellen Matrizen $A \in M_{12}(\mathbb{R})$ mit Minimalpoylnom $m_A = (X^4 + 3X^2 + 2)(X-1)^2$ und charakteristischem Polynom $\chi_A = (X^4 + 3X^2 + 2)^2(X-1)^4$.

Bilinearformen

V9.3. Aufgabe. Gegeben sind die Funktionen

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 \ ,$$

$$\beta : Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i=-1}^{2} f(i)g(i) \ ,$$

$$\gamma : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i=-1}^{2} f(i)g(i) \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass alle obigen Abbildungen reelle Bilinearformen sind.

(b) Bestimmen Sie jeweils die darstellende Matrix von α bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ und von γ bezüglich der Basis $\mathcal{P}_3 = \{1, X, X^2, X^3\}$.

(c) Untersuchen Sie, welche dieser Bilinearformen symmetrisch/schief-symmetrisch/alternierend/ausgeartet sind.

(d) Sei $U := \mathrm{Span}\{(1,1,0)^T, (2,-1,-1)^T\} \leq \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $U^\perp$ bezüglich α.

(e) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}_3[X]$ bezüglich γ und geben Sie die darstellende Matrix $[\gamma]_\mathcal{B}$ an.

(f) Bestimmen Sie die Trägheit von γ.