Arne Geyer, Anne Henke,
Alexandra Zvonareva

10. Vortragsübung
Lineare Algebra 2

Sommersemester 2020
16.07.2020

Aufgaben zu Euklidischen/Unitären Vektorräumen und ihren Endomorphismen

V10.1. Aufgabe. Beweisen Sie, dass die folgende Abbildung $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $A \mapsto \max_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \|Ax\|/\|x\| = \max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$ eine Norm ist.

V10.2. Aufgabe. Konstruieren Sie die Matrix der Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene $x + y + z = 0$.

V10.3. Aufgabe. Sei $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionale euklidische Raum. Für zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den Abstand $d(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|$. Der Abstand ist eine Metrik, d.h.

- $d(v_1, v_2) \geq 0$, für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und $d(v_1, v_2) = 0$, dann und genau dann wenn $v_1 = v_2$;
- $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$ für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$;
- $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$ für alle $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$.

Beweisen Sie, dass für die Orthogonalprojektion v_U von v auf $U \leq \mathbb{R}^n$ die folgende Ungleichung gilt: $d(v, v_U) \leq d(v, u')$ für alle $u' \in U$.

V10.4. Aufgabe. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$ an, sodass die darstellende Matrix von T_A bezüglich $\mathcal{C}$ Diagonalmatrix ist, sowie die zugehörige Diagonalmatrix D. Geben Sie die orthogonale Matrix Q an, sodass $Q^T AQ = D$. Schreiben Sie T_A als Summe der Orthogonalprojektionen auf Eigenräume von T_A.

V10.5. Aufgabe. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $A^T A$ positiv semidefinit ist. Wann ist $A^T A$ positiv definit?