Lineare Algebra I

Prof. Dr. A. Henke

Wintersemester 2019/20

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript zur Linearen Algebra folgt auf zehn Vorlesungen zu den Grundlagen der Mathematik, in denen die Anfänge der Aussagenlogik, Beweismethoden inklusive Induktionsbeweise, Abbildungen, Äquivalenzrelationen, Abzählbarkeit von Mengen und algebraische Grundstrukturen abgehandelt wurden. Der Leser sei gewarnt, Skript und Vorlesung stimmen nicht immer überein. Eine eigene Mitschrift in der Vorlesung ist auch deshalb ratsam, als dies über die Mathematik hinausgehende Fähigkeiten eintrainiert.

Der vorliegende Text hat von vielen Quellen profitiert, die an dieser Stelle nicht mehr alle nachvollziehbar sind. Insbesondere beruht er auf Ausarbeitungen zur Linearer Algebra von vielen Kollegen, insbesondere in Oxford und Stuttgart. Ihnen allen gilt mein Dank. Dank geht auch an Herrn Saeer Noorani für das Tippen eines Grossteils dieses Manuskriptes. Ohne seinen Einsatz würde dieses Skript nicht existieren. Das Manuskript wurde recht schnell Korrektur gelesen und angepasst; es ist anzunehmen, dass der Text deshalb noch Fehler enthält. Das gesetzte Latex entspricht nicht an allen Stellen den Regeln ordentlichen Schreibens, und sollte daher nicht als Vorbild für die Erstellung von eigenen Abschlussarbeiten dienen. Dem Leser wird geraten, den Text kritisch und nach Verständnis suchend zu lesen.

Die meisten Textbücher zur Linearen Algebra sind erheblich sorgfältiger geschrieben als dies für ein Skript üblich ist. So kann auch dieses Skript die gute und reichhaltige Literatur zur Linearen Algebra nicht ersetzen, und dem Leser wird empfohlen, sein Studium durch die vielfältig vorhandene Literatur zu ergänzen. Textbücher sind sehr unterschiedlich im Schreibstil, manche kurz und abstrakt, andere mit vielen Details und Beispielen. Den Studierenden wird geraten sich wenigstens ein Textbuch zur Linearen Algebra zu suchen, mit dem er oder sie gut zurecht kommt, und dieses ergänzend zum Skript zu lesen.

Stuttgart, den 29. Dezember 2019.

Kapitel 1

Matrizen

In diesem Kapitel sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1_R, beispielsweise ist $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Matrizen sind wichtige Objekte der Linearen Algebra; das Rechnen mit Matrizen ist fundamental in Linearer Algebra. Die saloppe Definition einer Matrix ist:

Definition 1.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-Matrix ist ein rechteckiges Schema mit $m \cdot n$ Zahlen aus R (oder Variablen), angeordnet in m Reihen und n Spalten.

Beispiel 1.2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ist eine 2×3-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$.

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ ist eine 3×1-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Q}$, auch *Spaltenvektor* genannt.

$\begin{pmatrix} 0,7 & \sqrt{3} & -\pi \end{pmatrix}$ ist eine 1×3-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$, auch *Zeilenvektor* genannt.

Notation 1.3. a) Sie R ein kommutativer Ring mit Eins. Formal ist eine Matrix definiert als eine Funktion $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to R$, wobei gilt $(i, j) \mapsto A((i, j))$ mit $A((i, j)) =: a_{ij}$. Wir schreiben diese Matrix als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (a_{ij}).$$

Hierbei heisst a_{ij} der (i, j)te Eintrag der Matrix A. Man schreibt auch A_{ij} für den (i, j)ten Eintrag einer Matrix A.

b) $M_{m \times n}(R)$ ist definiert als die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in R. Man schreibt auch $R^{m \times n}$ statt $M_{m \times n}(R)$. Ist $n = m$, so heißt eine Matrix $A \in M_{n \times n}(R)$ *quadratische* Matrix. Man schreibt $M_n(R)$ statt $M_{n \times n}(R)$. Die Menge der Spaltenvektoren $M_{m \times 1}(R)$ wird auch mit R^m bezeichnet.

c) Aus (a) und der Definition von Gleichheit von Funktionen folgt: Zwei Matrizen $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ und $B = (b_{ij}) \in M_{p \times q}(R)$ sind genau dann gleich, wenn $m = p$ und $n = q$ und $a_{ij} = b_{ij}$ ist, für alle $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.

Definition 1.4. Seien $A, B \in M_{m\times n}(R)$ und $\lambda \in R$.

Definiere die Summe $A + B$ als die Matrix mit (i,j)tem Eintrag $a_{ij} + b_{ij}$, für $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.

Definiere die Matrix $\lambda \cdot A$ als die Matrix mit (i,j)tem Eintrag $\lambda \cdot a_{ij}$, für $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.

Beachte, dies definiert Abbildungen

$$+\ : M_{m\times n}(R) \times M_{m\times n}(R) \to M_{m\times n}(R), \quad (A,B) \mapsto A+B,$$

$$\cdot\ : R \times M_{m\times n}(R) \to M_{m\times n}(R), \quad (\lambda, A) \mapsto \lambda \cdot A.$$

Elemente $\lambda \in R$ heißen in diesem Zusammenhang auch *Skalare*.

Beispiel 1.5. Wir haben

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Wir werden viel mit Matrizen in dieser Vorlesung rechnen. Deshalb ist es sinnvoll sich die Rechenregeln für Matrizen sorgfältig anzuschauen:

Lemma 1.6. *Seien $A, B, C \in M_{m\times n}(R)$. Dann ist*

i) $A + B = B + A$,

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Insbesondere folgt, dass $(M_{m\times n}(R), +)$ eine abelsche Gruppe ist mit neutralem Element $0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, *auch Nullmatrix genannt. Die additiv inverse Matrix zu $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ ist die Matrix $-A := (-a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$.*

Beweis. Folgt durch direktes Nachrechnen aus den Gruppenaxiomen für $(R, +)$. Beispielsweise haben wir:

i) Da $A, B \in M_{m\times n}(R)$ folgt aus Definition 1.4 auch $A + B$ und $B + A$ sind in $M_{m\times n}(R)$.
Der (i,j)te Eintrag von $A + B$ ist $a_{ij} + b_{ij}$, für $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.
Der (i,j)te Eintrag von $B + A$ ist $b_{ij} + a_{ij}$, für $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.
Da Addition in R kommutativ ist, gilt $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ für alle Indizes $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Damit folgt $A + B = B + A$.

ii) Die zweite Behauptung wird analog zur ersten Behauptung bewiesen.

iii) Wir haben für eine beliebige Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$:

$$\begin{aligned} A+0 &= (a_{ij})+0 = (a_{ij}+0) = (a_{ij}) = A, \\ 0+A &= \cdots = A. \end{aligned}$$

Also ist die Nullmatirx das neutrale Element bezüglich Addition in $M_{m\times n}(R)$.

iv) Wir haben für eine beliebige Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$:

$$\begin{aligned} A+(-A) &= (a_{ij})+(-a_{ji}) = (0) = 0, \\ (-A)+A &= (-a_{ij})+(a_{ji}) = (0) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $-A$ das additive Inverse zu $A \in M_{m\times n}(R)$

□

Bemerkung 1.7. Nach dem Grundlagenkapitel ist das additive Inverse eines Elementes einer Gruppe eindeutig bestimmt. Seien $A, B \in M_{m\times n}(R)$. Definiere $A - B := A + (-B)$. Es gilt wiederum nach abstrakten ÜBerlegungen aus dem Grundlagenkapitel:

$$-(A+B) = -A + (-B) = -A - B.$$

Beweis. Wir benutzen die Eigenschaften aus Lemma 1.6, um die Behauptung nochmals nachzurechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} (A+B)+(-A-B) &= A + (B + ((-A)+(-B))) \\ &= A + (B + (-B) + (-A)) \\ &= A + (0 + (-A)) \\ &= A + (-A) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da das additive Inverse in einer Gruppe nach dem Grundlagenkapitel eindeutig bestimmt ist, folgt:

$$-(A+B) = -A - B.$$

□

Lemma 1.8. *Seien $A, B \in M_{m\times n}(R)$ und $\lambda, \mu \in R$. Dann gilt:*

i) $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$,

ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$,

iii) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$,

iv) $1 \cdot A = A$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. Benutzt die Ringaxiome in R.

Bemerkung 1.9. Schreibe 0_R und 1_R für das Nullelement bzw. das Einselement von Ring R. Es gilt für $A \in M_{m\times n}(R)$:

i) $0_R \cdot A = 0$, wobei die letzte Null die Nullmatrix ist,

ii) $(-1_R) \cdot A = -A$.

Beweis. i) Für $A \in M_{m\times n}(R)$ gilt:

$$\begin{aligned} 0_R \cdot A &= (0_R + 0_R) \cdot A && \text{(da } 0_R \text{ neutrales Element bzgl. + in R)}, \\ &= 0_R \cdot A + 0_R \cdot A && \text{(nach Distributivgesetz 1.8 ii))}. \end{aligned}$$

Addiere das additives Inverse $-0_R \cdot A$ zu dieser Gleichung von rechts, dann erhalten wir mit Lemma 1.6:

$$\begin{aligned} 0_R \cdot A + (-0_R \cdot A) &= (0_R \cdot A + 0_R \cdot A) + (-0_R \cdot A), \\ &= 0_R \cdot A + (0_R \cdot A + (-0_R \cdot A)), \\ &= 0_R \cdot A + 0, \\ &= 0_R \cdot A, \end{aligned}$$

was impliziert, dass $0 = 0_R \cdot A$ ist.

ii) Es gilt aufgrund der Ringaxiome und Lemma 1.8:

$$\begin{aligned} A + (-1_R) \cdot A &\overset{1.8\ iv)}{=} 1_R \cdot A + (-1_R) \cdot A, \\ &\overset{1.8\ ii)}{=} (1_R + (-1_R)) \cdot A, \\ &= \quad 0_R \cdot A = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also ein Element $X := (-1) \cdot A$ gefunden mit $A + X = 0 = X + A$. Das additive Inverse zu $A \in M_{m\times n}(R)$ ist eindeutig bestimmt, also ist das additive Inverse zu A das Element $(-1_R)\cdot A$, beziehungsweise als Gleichunggilt $-A = (-1_R) \cdot A$.

□

Definition 1.10. Sei $A \in M_{m\times n}(R)$ und $B \in M_{n\times p}(R)$. Definiere Multiplikation von Matrizen durch

$$M_{m\times n}(R) \times M_{n\times p}(R) \to M_{m\times p}(R), (A, B) \mapsto A \cdot B.$$

Hierbei ist $X := A \cdot B \in M_{m\times p}(R)$ die Matrix mit (ij)tem Eintrag

$$X_{ij} = (A \cdot B)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

für alle $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq p$.

Beispiel 1.11. Sei $R = \mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen.

a) i) Wir berechnen ein spezielles Matrixprodukt, „Zeile mal Spalte“:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = (-4) \in M_{1\times 1}(\mathbb{Z}).$$

ii) Allgemeiner haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 0 & 1(-1) + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3(-1) + 0\cdot 2 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ -1\cdot 4 + 2\cdot 0 & (-1)(-1) + 2\cdot 2 & (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 4 + 1\cdot 0 & 1(-1) + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 12 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir schreiben eine Matrix A auch als $A = \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ — & a_2 & — \\ & \vdots & \\ — & a_m & — \end{pmatrix}$, mit der Bedeutung, dass A die Zeilen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ hat. Wir schreiben auch $B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$, mit der Bedeutung, dass B die Spalten $b_1, b_2, \ldots, b_p$ hat. Dann ist

$$A \cdot B = (a_i \cdot b_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

In Worten bedeutet dies: der (i, j)te Eintrag von $A \cdot B$ ist das Produkt $a_i \cdot b_j$, von Zeile i mal Spalte j, wobei $a_i \cdot b_j$ durch 1.10 definiert ist.

Beispiel 1.12. a) Man nennt eine Matrix $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(R)$ eine *Diagonalmatrix*, falls $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Das heisst die Matrix D hat die Form:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn});$$

beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, 5, -3).$$

Die Matrix $I_n := \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in M_n(R)$ heißt *Einheitsmatrix* oder *Identitätsmatrix*.

b) Sei $1 \leq i, j \leq n$. Definiere $E_{ij} \in M_n(R)$ als Matrix mit Eintrag Eins in Position (i, j) und Null überalll sonst.

$$(E_{ij})_{kl} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = i, l = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Matrizen nennt man *Standardmatrix* oder *Standard-Einheitsmatrix* oder *Matrixeinheit*. Zum Beispiel haben wir für $n = 2$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{falls } j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$I_n = E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}.$$

Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$. Dann ist

$$E_{ij} \cdot A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

d.h. die j-te Zeile von A wird in Zeile i geschrieben und alle anderen Einträge werden Null. Und es ist

$$A \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & i \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a_{ni} & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

d.h. die $i$te Spalte steht in Spalte j und alle anderen Einträge sind Null.

Lemma 1.13. *Seien A, B, C, D Matrizen mit Einträgen in R. Wenn immer die Summen und Produkte definiert sind, dann gilt:*

a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ *Assoziativgesetz*

b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ *Distributivgesetz*
$D \cdot (A + B) = D \cdot A + D \cdot B$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen:

a) Damit $A \cdot (B \cdot C)$ definiert ist, benötigen wir, dass $A \in M_{m \times n}(R), B \in M_{n \times p}(R)$ und $C \in M_{p \times q}(R)$. Angenommen dies gilt, dann folgt: der (i, j)te Eintrag von $A \cdot (B \cdot C)$ ist

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &\overset{1.10}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B \cdot C)_{kj} \\ &\overset{1.10}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{t=1}^{p} b_{kt} c_{tj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik} b_{kt} c_{tj}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt benutzen wir die Ringaxiome von R, wie das Distributivgesetz in R und das Assoziativgesetz für die Multiplikation in R. Analog zeigt man

$$(A \cdot B) \cdot C = \sum_{t=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kt} c_{tj}.$$

Da Addition in R kommutativ ist, folgt:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

b) Übung.

□

Bemerkung 1.14. Da Multiplikation von Matrizen assoziativ ist, schreiben wir $A \cdot B \cdot C$ statt $A \cdot (B \cdot C)$oder$(A \cdot B) \cdot C$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} A^n &:= \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{n mal}}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ A^0 &:= I_n. \end{aligned}$$

Theorem 1.15. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann ist $(M_n(R), +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement $I_n = diag(1, \dots, 1)$. Ist $n = 1$, so ist $M_1(R) = R$ kommutativ. Für $n \geq 2$ ist $M_n(R)$ nicht kommutativ.*

Beweis. a) Nach Lemma 1.6 ist $(M_n(R), +)$ eine abelsche Gruppe. Nach Lemma 1.13 ist Multiplikation assoziativ, und die Distributivgesetze gelten. Mit Definition 1.10 folgt $I_n \cdot A = A = A \cdot I_n$, für alle $A \in M_n(R)$, das heisst, I_n ist das neutrale Element von $M_n(R)$ bezüglich Multiplikation. Also ist $M_n(R)$ ein Ring mit Eins.

b) Sei $n = 1$. Da R ein kommutativer Ring ist, gilt $ab = ba$, für alle $a, b \in R$. Also ist

$$(a) \cdot (b) \overset{1.10}{=} (ab) = (ba) \overset{1.10}{=} (b) \cdot (a), \tag{1.1}$$

das heisst, $M_1(R)$ ist kommutativ.

Sei $n \geq 2$. Es gilt $E_{12} \cdot E_{11} = 0$ und $E_{11} \cdot E_{11} = E_{12}$. Also ist $M_n(R)$ nicht kommutativ.

□

Bemerkung. Es gibt Matrizen $A, B \in M_n(R)$ mit $A \neq 0, B \neq 0$, aber mit $AB = 0$. Man nennt in diesem Fall die Elemente A, B aus dem Ring $M_n(R)$ *Nullteiler*.

Definition 1.16. Sei $A \in M_n(R)$. Dann heißt A *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in M_n(R)$ mit

$$AB = I_n = BA.$$

Die Matrix B heißt *zu A inverse* Matrix.

Bemerkung 1.17. a) Da Multiplikation in $M_n(R)$ assoziativ ist, folgt aus dem Grundlagenkapitel, dass die inverse Matrix zu A eindeutig ist. Wir schreiben für die zu A inverse Matrix A^{-1}.

b) Angenommen $A, B \in M_n(R)$ sind invertierbar, dann ist auch AB invertierbar mit

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Beweis. Diese Behauptung wurde allgemeiner im Grundlagenkapitel bewiesen. Alternativ kann man direkt nachrechnen:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &\overset{\text{Assoz.}}{=} A(B(B^{-1}A^{-1})) \\ &\overset{\text{Assoz.}}{=} A((BB^{-1})A^{-1}) \\ &\overset{\textbf{??}}{=} A(I_n \cdot A^{-1}) \\ &\overset{1.15}{=} A \cdot A^{-1} \\ &\overset{1.16}{=} I_n. \end{aligned}$$

Analog gilt: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Da nach a) die inverse Matrix zu AB eindeutig ist, folgt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Beispiel 1.18. a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ ist invertierbar mit inverser Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Wir beweisen dies durch Nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ ist nicht invertierbar, denn

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für alle $b_{ij} \in R$.

c) Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ hat die inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, aber keine Inverse in $M_2(\mathbb{Z})$.

d) Sie $R = K$ ein Körper, beispielsweise $R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \ldots\}$. Die im Folgenden definierten Matrizen heissen *Elementarmatrizen*. Sie sind fundamental wichtig zum Lösen von linearen Gleichungssystemen. Hier wollen wir festhalten, dass diese Matrizen jeweils invertierbar sind, da jedes Element $c \neq 0$ aus dem Körper K ein Inverses hat.

i) Matrix $P_{ii}(c) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$ hat die Inverse $P_{ii}(c^{-1})$, denn:

$$\begin{aligned} P_{ii}(c) \cdot P_{ii}(c^{-1}) &= (I_n + (c-1)E_{ii})(I_n + (c^{-1} - 1)E_{ii}) \\ &= I_n + ((c-1) + (c^{-1} - 1) + (c-1)(c^{-1} - 1))E_{ii} \\ &= I_n + (c + c^{-1} - 2 + \underbrace{cc^{-1}}_{=1} - c - c^{-1} + 1)E_{ii} \\ &= I_n + 0 \cdot E_{ii} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

ii) Sei $i \neq j$, $P_{ij}(c) := \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & c & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ hat die Inverse $P_{ij}(-c)$,

denn

$$\begin{aligned} P_{ij}(c) \cdot P_{ij}(-c) &= (I_n + cE_{ij})(I_n - cE_{ij}) \\ &= I_n + cE_{ij} - cE_{ij} + c(-c)\underbrace{E_{ij}E_{ij}}_{=0 \ (1.12)} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

iii) Für $i \neq j$ sei Q_{ij} definiert als die quadratische Matrix mit Eintrag Eins in Positionen (i, j) und (j, i), sowie mit Einsen auf der Diagonale, ausser in den Positionen (i, i) und (j, j), die Null sind. Alle weiteren Einträge seien Null. Dann hat Q_{ij} Inverse Q_{ij}, ist also *selbstinvers*, denn

$$\begin{aligned} Q_{ij} \cdot Q_{ij} &= (I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})(I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}) \\ &= I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} + E_{ii} - E_{ij} - E_{jj} \\ &+ E_{ji} - E_{ji} + E_{ij} - E_{ij} + E_{ii} + E_{ji} - E_{ji} + E_{jj} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

.

Bemerkung 1.19. Da nicht jedes Element ungleich Null im Ring $(M_n(R), +, \cdot)$ invertierbar ist, ist $M_n(R)$ kein Körper.

Theorem 1.20. *Sei R kommutativer Ring mit Eins. Definiere $GL(n,R) := GL_n(R) := \{A \in M_n(R) | A \text{ invertierbar}\}$. Dann ist $(GL_n(R), \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element I_n.*

Beweis.

i) Sind $A, B \in GL_n(R)$, dann folgt aus Bemerkung 1.17, dass $A \cdot B \in GL_n(R)$ ist. Also ist $\cdot : GL_n(R) \times GL_n(R) \to GL_n(R)$, d.h. $GL_n(R)$ ist abgeschloßen bezüglich Multiplikation.

ii) Nach Theorem 1.13 ist Matrixmultiplikation assoziativ und I_n ist das neutrale Element bezüglich Multiplikation.

iii) Nach Definition gibt es zu jedem $A \in GL_n(R)$ eine Inverse in $GL_n(R)$.

□

Beispiel 1.21. In diesem Beispiel konstruieren wir mit Hilfe von Matrizen einen Körper mit vier Elementen. Zunächst wiederholen wir Konzepte aus den Grundlagen:

a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Aus dem Grundlagenkapitel wissen wir, dass $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, mit Addition und Multiplikation $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}$ und $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$, wobei $\overline{0}$ das neutrale Element bzgl. Addition und $\overline{1}$ das neutrale Element bezüglich Multiplikation ist.

b) Sei $m = 2$. Wir berechnen die*Additionstafel* und *Multiplikationstafel* von $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$: Allgemein ist die Verknüpfungstafel bezüglich einer Verknüpfung $*$ definiert durch:

$$\begin{array}{c|c} * & \overline{b} \\ \hline \\ \overline{a} & \overline{a} * \overline{b} \\ \\ \end{array}.$$

Die Additionstafel für $m = 2$ ist:

$$\begin{array}{c|cc} + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array}.$$

Die Multiplikationstafel für $m = 2$ ist:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}.$$

Beachte: $\overline{a} = \overline{1}$ hat multiplikatives Inverse $\overline{a}^{-1} = \overline{1}$. Also jedes Element $\overline{a} \in \mathbb{Z}_2 \backslash \{\overline{0}\}$ hat ein multiplikatives Inverses. Also ist $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ein Körper. Im Grundlagenkapitel haben wir allgemeiner gesehen, dass $\mathbb{Z}_p$ ein Körper ist, genau dann, wenn p eine Primzahl ist. In der Algebravorlesung lernt man, dass endliche Körper p^n viele Elemente haben, wobei p eine Primzahl ist, und $n \in \mathbb{N}$; und umgekehrt, zu gegebener Primzahl p und natürlicher Zahl n gibt es im wesentlichen nur einen Körper mit p^n Elementen. Wir schreiben auch $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für den Körper mit p Elementen, beziehungsweise $\mathbb{F}_{p^n}$ für den Köper mit p^n Elementen.

c) Wir definieren nun einen Körper mit vier Elementen: $\mathbb{F}_4 := \{I, O, A, B\}$ mit

$$I := \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix},\ O := \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix},\ A := \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathbb{F}_4 \subseteq M_2(\mathbb{F}) = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Betrachte $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$, wobei $+$ die Matrizenaddition und $\cdot$ die Matrizenmultiplikation ist. Wir haben die folgenden Addition- und Multiplikationstabellen:

$$\begin{array}{c|cccc} + & O & I & A & B \\ \hline O & O & I & A & B \\ I & I & O & B & A \\ A & A & B & O & I \\ B & B & A & I & O \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & O & I & A & B \\ \hline O & O & O & O & O \\ I & O & I & A & B \\ A & O & A & B & I \\ B & O & B & I & A \end{array}.$$

Beispielsweise ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = I.$$

Insbesondere ist $\mathbb{F}_4$ abgeschloßen bezüglich $\cdot$ und $+$. Da $F_4 \subseteq M_2(\mathbb{F}_2)$, folgt aus Theorem 1.15

i) $+$ und $\cdot$ sind assoziativ in $\mathbb{F}_4$,

ii) das Distributivgesetz gilt in $\mathbb{F}_4$.

Aus der Additions- bzw. Multiplikationstabellen von $\mathbb{F}_4$ entnehmen wir:

(iii) $O = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$ ist neutrales Element bezüglich $+$,

(iv) $I = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$ ist neutrales Element bezüglich $\cdot$.

(v) Multiplikation ist kommutativ.

(vi) Wir suchen zu $X \in \mathbb{F}_4$ ein $Y \in \mathbb{F}_4$ mit $X + Y = 0$. Additive Inverse zu O ist O, zu I ist I, zu A ist A und zu B ist B.

(vii) Wir suchen zu $0 \neq X \in \mathbb{F}_4$ ein $Y \in \mathbb{F}_4$ mit $X \cdot Y = I$. Multiplikative Inverse zu I ist I, zu A ist B und zu B ist A.

Damit folgt aus der Definition des Körpers, dass $(\mathbb{F}_4, +, \cdot)$ ein Körper mit vier Elementen ist.

Kapitel 2

Lineare Gleichungssysteme

Hilfreich in vielen Anwendungen, aber zentral auch für viele Rechnungen in der linearen Algebra ist das Lösen von linearen Gleichungssystemen. Sei K ein Körper, zum Beispiel $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \ldots\}$.

Definition 2.1. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist ein System von Gleichungen der Form:

$$a_{11}x + \cdots + a_{1n}x = b_1 \tag{2.1}$$
$$\vdots \tag{2.2}$$
$$a_{m1}x + \cdots + a_{mn}x = b_m \tag{2.3}$$

mit $m, n \in \mathbb{N},\ a_{ij} \in K,\ b_i \in K$ für $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ fest vorgegeben, und $x_1, \ldots, x_n$ gesucht.

Notation 2.2. Sei

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{m1} & \ldots & & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$$

und

$$\mathbf{b} \coloneqq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m = M_{m\times 1}(K).$$

Schreibe

$$\mathbf{x} \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $x \in K^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems aus 2.1 genau dann, wenn

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Die Matrix

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathbf{M_{m\times(n+1)}(K)} \tag{2.4}$$

heißt *augmentierte/erweiterte Matrix* des linearen Gleichungssystems. Ein lineares Gleichungssystem heisst *homogen*, falls $\mathbf{b} = 0$ ist; andernfalls heisst es *inhomogen*.

Beispiel 2.3. Bevor wir die abstraktere Theorie machen, betrachten und lösen wir das folgende lineare Gleichungssystem mit den später im Kapitel beschriebenen Methoden:

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 4x_4 &= 23. \end{aligned}$$

Setze $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 13 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 23 \end{pmatrix}$. Das Gleichungssystem entspricht dann $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wir modifizieren nun die erweiterte Matrix $(A \mid \mathbf{b})$. Als erstes vertauschen wir die erste und zweite Gleichung. Unsere Kurznotation für diese durchgeführte Operation ist $(R_1 \leftrightarrow R_2)$, wobei R für *Reihe*/Zeile oder das englische Wort *row* steht. Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 4x_4 &= 23. \end{aligned}$$

In der Matrizenschreibweise wird dies durch die folgende erweiterte Matrix wiedergegeben, die wir durch das Vertauschen der ersten und zweiten Zeile aus der Matrix $(A \mid \mathbf{b})$ erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & 8 & 13 & 4 & 23 \end{array}\right).$$

Ersetze nun die 3. Gleichung durch 3. Gleichung minus 5 mal die 1.Gleichung, in Kurznotation $(R_3 \to R_3 - 5R_1)$. Wir erhalten die folgenden Gleichungen beziehungsweise Matrix:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ -2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -2, \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Ersetze nun die 3. Gleichung durch die 3. Gleichung plus die 2. Gleichung, also $(R_3 \to R_3 + R_2)$; wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ersetze die 2.Gleichung durch $1/2$ mal die 2.Gleichung, also $(R_2 \to 1/2 R_2)$; wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zuletzt ziehen wir die 2. Gleichung zweimal von der 1.Gleichung ab, also $(R_1 \to R_1 - 2R_2)$:

$$\begin{aligned} x_1 + 1x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aus dieser Matrix kann man nun die Lösungen des linearen Gleichungssystems leicht ablesen: Wähle $X_3 = \alpha \in K$ und $x_4 = \beta \in K$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - \alpha - 4\beta \\ x_2 &= 1 - \alpha + 2\beta. \end{aligned}$$

Äquivalent dazu können wir die Lösungen des Gleichungssystem durch Vektoren ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \alpha - 4\beta \\ 1 - \alpha + 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für beliebige $\alpha, \beta \in R$. Wir formalisieren im Folgenden, was wir in diesem Beispiel gemacht haben.

Definition 2.4. Seien $A, B \in M_{m \times n}(K)$. Wir sagen Matrix B entsteht aus Matrix A durch elementare Zeilenumformungen (EZU), wenn wir B aus A durch eine endliche Folge der folgenden drei Operationen erhalten:

1. Multipliziere eine Zeile mit einer Konstanten $\lambda \in K \setminus \{0\}$, also $(R_i \to \lambda R_i)$.

2. Addieren des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, für ein $\lambda \in K$, also $(R_i \to R_i + \lambda R_j)$.

3. Vertausche zwei Zeilen, also ($R_i \leftrightarrow R_j$).

In diesem Fall schreiben wir $A \to B$, gesprochen B entsteht aus A durch elementare Zeilenumformungen. In obiger Notation steht R_i für Zeile i.

Analog lassen sich elementare Spaltenumformungen (ESU) definieren. Sie eignen sich im Gegensatz zu elementaren Zeilenumformungen aber *nicht* zur Lösung von Gleichungssysteme, da sie die Lösungsmenge verändern.

Bemerkung 2.5. a) Jede elementare Zeilenumformung lässt sich durch eine weitere elementare Zeilenumformung rückgängig machen. Beispielsweise können wir $R_i \to \lambda R_i$ durch $R_i \to \lambda^{-1} R_1$ rückgängig machen. Hierzu benötigen wir $\lambda \neq 0$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die elementaren Zeilenumformungen angewandt auf die Einheitsmatrix I_n ergeben die folgenden Matrizen:

i)

$$I_n \overset{R_i \to \lambda R_i}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = P_{ii}(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}.$$

ii)

$$I_n \overset{R_i \to R_i + \lambda R_j}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = P_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}.$$

iii) Und

$$I_n \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = Q_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}.$$

Die Matrizen $P_{ij}(\lambda)$ und Q_{ij} sind die *Elementarmatrizen* aus dem vorigen Kapitel. Sie sind nach Beispiel 1.18 invertierbar.

Lemma 2.6. *a) Wendet man eine elementare Zeilenumformung auf eine Matrix $A \in M_{n \times m}(K)$ an, so erhält man die Matrix PA, wobei $P \in Gl(n, K)$ die Elementarmatrix ist, die man erhält, wenn man dieselbe elementare Zeilenumformung auf I_n anwendet.*

b) Wenn man eine elementare Spaltenumformung auf eine Matrix $A \in M_{n\times m}(K)$ anwendet, so erhält man die Matrix AP, wobei $P \in Gl(m, K)$ die Elementarmatrix ist, die man erhält, wenn man dieselbe elementare Spaltenumformung auf I_m anwendet.

Beweis. 1. Sei $A \in M_{n\times m}(K)$, und $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{ii}(\lambda)A &= (I_n + (\lambda - 1)E_{ii})A \\ &= I_n A + (\lambda - 1)E_{ii}A, \end{aligned}$$

was die Matrix ist, welche aus A entsteht, wenn man die i-te Zeile von A mit λ multipliziert.

2. Es ist

$$\begin{aligned} P_{ij}(\lambda)A &= (I_n + \lambda E_{ij})A \\ &= I_n A + \lambda E_{ij}A. \end{aligned}$$

Das ist die Matrix, die aus A entsteht, wenn man λ mal Zeile j zu Zeile i addiert.

3. Es ist

$$\begin{aligned} Q_{ij}A &= (I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})A \\ &= A - (i\text{-te Zeile von } A) - (j\text{-te Zeile}) + E_{ij}A + E_{ji}A, \end{aligned}$$

was gerade die Matrix ist, die aus A entsteht unter Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile.

□

Bemerkung 2.7. Wir schreiben $A \to B$, wenn B aus A durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht. Die Relation $\to$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M_{m\times n}(K)$.

Beweis. i) Die Relation ist reflexiv: $A \to A$ durch die leere Folge von elementare Zeilenumformungen, für alle $A \in M_{n\times m}(K)$.

ii) Die Relation ist zudem symmetrisch, da alle elementare Zeilenumformungen nach Bemerkung 2.5 invertierbar sind: Sei $A \to B$, für $A, B \in M_{n\times m}(K)$, so folgt, dass auch $B \to A$ gilt.

iii) Sei $A \to B$ und $B \to C$ für $A, B, C \in M_{n\times m}(K)$, dann entsteht C aus A durch eine endliche Folge von elementare Zeilenumformungen. Also ist $A \to C$, und somit ist die Relation transitiv.

□

Definition 2.8. Eine $m \times n$ Matrix E ist in Zeilen-reduzierter Stufenform (ZRF), falls gilt:

1. Die Nullzeilen von E liegen unterhalb der Zeile mit Einträgen ungleich Null.

2. Jede Zeile, die ungleich Null ist, hat einen führenden Eintrag Eins beim Lesen von links nach rechts.

3. Sind Zeilen i und $i+1$ ungleich Null, dann ist der führende Eintrag in Zeile $i+1$ echt weiter rechts als in Zeile i (beispielsweise die Eins steht in Zeile i an fünfter Stelle und in der $i+1$-ten Zeile an der siebten).

4. Enthält eine Spalte einen der führenden Zeileneinträgen, dann sind alle anderen Einträge in dieser Spalte Null.

Zum Beispiel sind die folgenden Matrizen in Zeilen-reduzierter Stufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 2.9 (Gauß-Elimination)**.** *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$.*

a) Dann lässt sich A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen umformen zu einer Matrix E in Zeilen-reduzierter Stufenform. Diese Matrix E ist eindeutig durch A bestimmt.

b) Es existiert eine invertierbare Matrix $P \in Gl_m(K)$ mit $P \cdot A = E$. Hierbei ist P ein Produkt von Elementarmatrizen, wobei diese die Elementarmatrizen sind, die zu den benutzten elementaren Zeilenumformungen gehören.

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage, zusammen mit Lemma 2.6. Wir beweisen die erste Aussage durch Induktion nach der Zeilenanzahl m der gegebenen Matrix A. Ist $A = 0$ die Nullmatrix, so ist A bereits in Zeilen-reduzierter Stufenform. Wir nehmen deshalb an, dass $A \neq 0$ ist. Für den Induktionsanfang betrachten wir eine Matrix A mit $m = 1$ Zeilen, also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

mit $a_{1j} \neq 0$. Mit der Umformung $(R_1 \to a_{1j}^{-1} R_1)$ erhalten wir:

$$E := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Matrix E ist in Zeilen-reduzierter Stufenform. Jede Matrix in $M_{1\times n}(K)$ lässt sich also in Zeilen-reduzierte Stufenform bringen.

Wir nehmen an, die Behauptung sei wahr für alle $A \in M_{m\times n}(K)$, mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $m \geq 2$ und sei $A \in M_{(m+1)\times n}(K)$ mit $A \neq 0$.

a) Wähle j_1 minimal mit j_1-te Spalte von A ist ungleich Null. Dann existiert ein (unter Umständen nicht eindeutiges) $1 \leq i \leq m+1$ mit $a_{ij_1} \neq 0$.

Wende folgende elementare Zeilenumformungen an: erst $(R_1 \leftrightarrow R_i)$, dann $(R_1 \to a_{ij_1}^{-1} R_1)$. Wir erhalten eine Matrix B_1 der Form

$$B_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & b_{21} & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & b_{(m+1)1} & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $b_{11} = 1$.

b) Wende nun die elementaren Zeilenumformungen $(R_i \to R_i - b_{i1} R_1)$ an, für alle $2 \leq i \leq m+1$. Wir erhalten eine Matrix B_2 der Form

$$B_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & b_{12} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{11} & \dots & c_{1(t-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{m1} & \dots & c_{m(t-1)} \end{pmatrix}.$$

Es ist $C \coloneqq (c_{ij}) \in M_{m \times (t-1)}(K)$, so dass wir die Induktionsvoraussetzung auf die Matrix C anwenden können.

c) Nach Induktionsvoraussetzung existieren endlich viele elementare Zeilenumformungen, mit denen die Matrix C zu einer Matrix E_1 in Zeilen-reduzierter Stufenform umgeschrieben werden kann. Wende dieselben elementaren Zeilenumformungen auf die Matrix B_2 an. Wir erhalten hierdurch eine Matrix B_3. Seien $j_2 < j_3 < \ldots < j_r$ die Spalten von B_3, die einen führenden Eintrag von E_1 enthalten. Addiere passende Vielfache der Zeilen $R_2, \ldots, R_{m+1}$ zu Reihe R_1, so dass die Einträge in den Spalten $j_2, \ldots, j_r$ in der 1.Zeile zu Null werden. Wir erhalten hierdurch in endlich vielen Schritten eine Matrix E in Zeilen-reduzierter Stufenform.

□

Beispiel 2.10. In diesem Beispiel bringen wir eine gegebene Matrix auf Zeilen-reduzierte Stufenform. Gegeben sei eine Matrix A mit

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden elementare Zeilenumformungs an, um die Matrix auf Zeilen-reduzierte Stufenform zu bringen:

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{2} R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to \frac{1}{2} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_2$ und $R_3 \to R_3 + 3R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Zeilen-reduzierter Stufenform.

Lemma 2.11. *Gegeben sind zwei lineare Gleichungssysteme mit erweiterten Matrizen $(A|\boldsymbol{b})$ und $(A'|\boldsymbol{b'})$. Gehen diese erweiterten Matrizen durch elementare Zeilenumformung auseinander hervor, so haben die linearen Gleichungssysteme $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b'}$ dieselbe Lösungsmenge:*

$$\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x} \mid A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}.$$

Beweis. Nach Vorraussetzung und Lemma 2.6 existieren Elementarmatrizen $U_1, \dots U_k \in Gl_m(K)$ mit

$$U_k \cdot \ldots \cdot U_1(A|\boldsymbol{b}) = (A'|\boldsymbol{b'}).$$

Setze $U = U_k \cdot \ldots \cdot U_1$, dann ist U als Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar, das heisst, $U \in Gl_m(K)$ und

$$(A'|\boldsymbol{b}') = U(A|\boldsymbol{b}) \overset{1.10}{=} (U \cdot A|U \cdot \boldsymbol{b}).$$

Damit gilt also $A' = U \cdot A$ und $\boldsymbol{b'} = U \cdot \boldsymbol{b}$. Ist also $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, so folgt durch Multiplikation mit U auch $UA\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{b}$, also $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$. Umgekehrt, ist $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b'}$, so ist also $UA\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{b}$. Da U invertierbar ist, multiplizieren wir die Gleichung von links mit U^{-1} und erhalten $A\boldsymbol{x} = U^{-1}UA\boldsymbol{x} = U^{-1}U\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$. Also folgt insgesamt

$$\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x} \mid A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}.$$

□

Bemerkung 2.12 (Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen)**.** Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gegeben. Bringe $(A|\boldsymbol{b})$ auf Zeilen-reduzierter Stufenform $(E|\mathbf{d})$ wobei $E \in M_{m\times n}(K)$ und $d \in M_{m\times 1}(K)$. Löse das lineare Gleichungssystem $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. Dann gilt nach 2.11

$$\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x} \mid E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}\}.$$

Beachte: Ist $(E|\boldsymbol{d})$ in Zeilen-reduzierter Stufenform dann ist auch E in Zeilen-reduzierter Stufenform. Angenommen E hat genau l Zeilen ungleich Null. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Ist $d^T = (d_1, \ldots, d_l, 1, 0, \ldots 0)$, so ist die $l+1$-te Gleichung von $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ gerade
$$0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_n = 1.$$
Das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat folglich keine Lösungen. Für die Notation der transponierten Matrix d^T vergleiche mit Definition 6.1.

2. Ist $d = (d_1, \ldots, d_l, 0 \ldots, 0)$, dann hat das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ Lösungen. Sei I die Menge der Spaltenindizes j von Spalten, die keine führenden Einträge enthalten. Setze $x_j = \alpha_j \in K$ beliebig, für alle $j \in I$. Man nennt solche Variablen x_j *freie Variablen.* Die ersten l Gleichungen bestimmen dann genau die Lösungen von $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ eindeutig in den Parametern α_j mit $j \in I$.

Beispiel 2.13. Wir beziehen uns auf Beispiel 2.10.

a) Betrachte das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 &= 1. \end{aligned}$$
Erweiterte Matrix ist
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right).$$
Zeilen-reduzierte Stufenform ist
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

b) Betrachte
$$\begin{aligned} 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$
Erweiterte Matrix ist
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right).$$
Zeilen-reduzierte Stufenform ist
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wähle $x_2 = \alpha \in K$ und $x_4 = \beta \in K$ beliebig, damit haben wir

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\alpha - 2\beta \\ x_3 &= -\beta. \end{aligned}$$

Also sind die Lösungen des linearen Gleichungssystem gerade

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit α und β beliebig in K.

c) Finde $d \in K$, so dass das linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 &= d \end{aligned}$$

mindestens eine Lösung hat.

Wir bringen die erweiterte Matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & d \end{array}\right)$ durch analoge Rechnungen wie in Beispiel 2.10 auf Zeilen-reduzierter Stufenform $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-3 \end{array}\right)$.

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn $d = 3$ ist. In diesem Fall sind die Lösungen wie folgt: Wähle $x_2 = \alpha \in K$ und $x_4 = \beta \in K$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2\alpha - 2\beta \\ x_3 &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

Damit hat das lineare Gleichungssystem die Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in K \right\}.$$

Bemerkung 2.14. a) Theorem 2.9 bestimmt ein Repräsentantensystem für $M_{m \times n}(K)$ bezüglich der Relation $\rightarrow$.

b) Bringt man eine Matrix A in Zeilen-reduzierter Stufenform E, so lohnt es sich, das Produkt P der Elementarmatrizen direkt mitzuberechnen, um am Ende die Rechnung durch $P \cdot A = E$ zu überprüfen.

Beispiel 2.15. Sei $B = (A|\mathbf{b})$ wie in Beispiel 2.3. Wir wenden elementare Zeilenumformungen an auf

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 2 & 2 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 13 & 4 & 23 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir wenden $R_1 \leftrightarrow R_2$ und $R_3 \to R_3 - 5R_2$ an, und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Dann wenden wir $R_3 \to R_3 + R_2$ und $R_2 \to {}^1\!/_2 R_2$ an:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Schließlich wenden wir $R_1 \to R_1 - 2R_2$ an:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Wir testen unsere Rechnung durch:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 4 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 2.16 (Chrakterisierung invertierbarer Matrizen)**.** *Sei $A \in M_n(K)$. Dann sind äquivalent:*

a) $A \to I_n$, das heisst, das Gauss Verfahren liefert die Matrix I_n;

b) Matrix A ist Produkt von Elementarmatrizen;

c) Matrix A ist invertierbar;

d) Das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$.

Beweis. (i) Gegeben sei eine Matrix $A \in M_n(K)$ mit $A \to I_n$. Wir zeigen, dass hieraus die anderen drei Aussagen folgen: Nach Theorem 2.9 existieren Elementarmatrizen $U_1, \dots, U_t \in M_n(K)$ mit $U_1 \cdots U_t \cdot A = I_n$. Nach Bemerkung 2.5 sind die Matrizen U_i invertierbar und die Inversen sind wieder Elementarmatrizen. Also ist $A^{-1} = U_t^{-1} \cdots U_1^{-1}$. Also ist A Produkt von Elementarmatrizen, und A ist invertierbar. Multipliziert man das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ von links mit A^{-1}, so folgt, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau eine Lösung hat, nämlich $x = 0$.

(ii) Gegeben sei eine Matrix $A \in M_n(K)$. Wir beweisen d) impliziert a). Bringe die Matrix A auf Zeilen-reduzierte Stufenform A' mit r führenden Einträgen in den Spalten $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$. Nach Lemma 2.11 haben die linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $A'x = 0$ die gleiche Lösungsmenge. Nach Voraussetzung d) hat also das lineare Gleichungssystem $A'x = 0$ nur die Lösung $x = 0$. Damit existieren keine freiwählbaren Variablen beim Lösen dieses linearen Gleichungssystems, siehe Bemerkung 2.12. Also ist $r = n$, beziehungsweise $j_i = i$, für alle $1 \leq i \leq n$. Also ist $A' = I_n$.

□

Bemerkung 2.17. Sei $A \in M_n(K)$ und sei $B \in M_n(K)$ mit $AB = I_n$. Dann gilt auch $BA = I_n$.

Beweis. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Bx = 0$ mit Lösung $x \in K^n$. Dann ist

$$x = I_n x = (AB)x = A(Bx) = A \cdot 0 = 0.$$

Also hat das lineare Gleichungssystem $Bx = 0$ nur die Nulllösung. Mit Theorem 2.16 folgt, dass die Matrix B invertierbar ist, es existiert also eine Matrix $C \in M_n(K)$ mit $BC = I_n = CB$. Dann folgt:

$$A = A \cdot I_n = A(BC) = (AB)C = I_n \cdot C = C.$$

Also ist A invertierbar mit $A^{-1} = B$. Insbesondere gilt dann auch die Gleichung $B \cdot A = I_n$. □

Theorem 2.18. *Sei $A \in M_{m \times n}(K)$.*

a) Dann lässt sich A durch eine endliche Folge von elementaren Zeilenumformungen und elementaren Spaltenumformungen auf die Form

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

bringen. Hier ist r die Anzahl der Hauptdiagonalelemente gleich Eins und heißt der Rang *der Matrix A. Der Rang einer Matrix ist eindeutig durch die Matrix bestimmt.*

b) Es existieren invertierbare Matrizen $P \in M_m(K)$ und $Q \in M_n(K)$ mit $PAQ = J_r$.

Beweis. Bringe A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilen-reduzierte Stufenform E. Matrix E habe jetzt führende Einträge in Spalten $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. Wir addieren nun passende Vielfache der Spalten $j_1, \ldots, j_r$ zu jeweils weiter rechts stehenden Spalten, so dass alle Einträge in diesen Spalten Null werden. Wir vertauschen anschließend die Spalten mit einer Eins so, dass wir die obige Form erhalten. □

Kapitel 3

Vektorräume

Sei K ein Körper, zum Beispiel $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \dots\}$. Die zentralen Objekte der Linearen Algebra sind Vektorräume. Bereits im letzten Kapitel haben wir den Prototyp eines Vekorraumes kennengelern, den K^n. In diesem Kapitel geben wir zahlreiche weitere konkrete und abstrakte Beispiele von Vektorräumen, bevor wir ihre Struktur in den nächsten Kapitel genauer analysieren.

Definition 3.1. Ein *Vektorraum (Vektorraum) über* K (oder K-Vektorraum) ist eine Menge V, zusammen mit zwei binären Operationen

Addition $+\colon V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w,$

Skalare Multiplikation $\cdot : K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$

derart, dass die folgenden Axiome gelten:

(V1) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$,

(V2) $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$,

(V3) $\exists 0_V \in V$ mit $0_V + w = w = w + 0_V \quad \forall w \in V$,

(V4) $\forall v \in V : \exists -v \in V$ mit $v + (-v) = 0_V$,

(V5) $\lambda(u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$, $\forall \lambda \in K$ und $\forall u, v \in V$,

(V6) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$, $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v \in V$,

(V7) $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$, $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v \in V$,

(V8) $1_k \cdot v = v$, $\forall v \in V$.

Bemerkung 3.2.

a) Elemente aus einem Vektorraum heißen *Vektoren*. Elemente aus K heißen in Zusammenhang mit K-Vektorräumen auch *Skalare*.

b) Die ersten vier Axiome eines Vektorraumes V sagen, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

c) Das Element 0_V heißt *Nullvektor*. Wie im Grundlagenkapitel gezeigt wurde, ist der Nullvektor als neutrales Element in der Gruppe $(V, +)$ eindeutig bestimmt. Genauso ist das additive Inverse $-v$ zu $v \in V$ eindeutig bestimmt.

d) Statt $\lambda \cdot v$ schreiben wir oft λv für alle $\lambda \in K,\ v \in V$. Wir schreiben auch $v_1 - v_2 := v_1 + (-v_2)$, für $v_1, v_2 \in V$.

e) Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum heißt auch *reeler Vektorraum.* Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum heißt auch *komplexer Vektorraum.*

Beispiel 3.3. a) Seien $n, m \geq 1$. Dann ist $M_{m\times n}(K)$ ein K-Vektorraum mit

   i) Addition $+$ gegeben als in Definition 1.4 definierte Matrixaddition,

   ii) Skalarmultiplikation $\cdot$ gegeben durch Skalarmultiplikation definiert in Definition 1.4.

   Die Details sind in Lemma 1.6 und Lemma 1.8 ausgearbeitet.

b) Als Spezialfall des ersten Beispiels ist damit die Menge $K^n := M_{n\times 1}(K)$ ein K-Vektorraum mit komponentenweiser Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

   und komponentenweiser Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},$$

   mit $\lambda, x_i, y_i \in K$ für $1 \leq i \leq n$. Genauso ist $M_{1\times n}(K) = \{(x_1 \ldots x_n) | x_i \in K\}$ ein K-Vektorraum. Dieses Beispiel beinhaltet auch, dass K selber ein K-Vektorraum ist.

c) Die Zeichenebene $V = \mathbb{R}^2$ ist ein reeller Vektorraum nach den letzten beiden Beispielen. Addition und Skalarmultiplikation lassen sich im Koordinatensystem geometrisch veranschaulichen, siehe Abbildung 3.1.

Lemma 3.4. *Sei V ein K-Vektorraum. Wir bezeichnen das neutrale Element bezüglich Addition in Körper K, das Nullelement, mit 0_K. Für beliebige $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt:*

i) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$;

ii) $0_K \cdot v = 0_V$;

iii) $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda(-v)$;

iv) ist $\lambda \cdot v = 0_v$, *dann ist entweder* $\lambda = 0_K$ *oder* $v = 0_V$.

Beweis. (Vergleiche die gemachten Aussagen auch mit Bemerkung 1.9.)

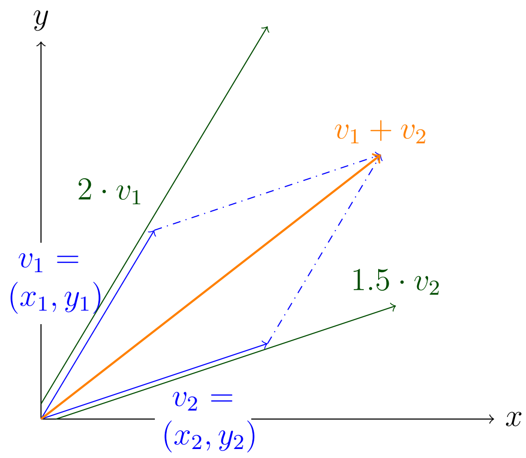

Abbildung 3.1: Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$.

i) Es ist $\lambda \cdot 0_V \overset{(V3)}{=} \lambda \cdot (0_V + 0_V) \overset{(V5)}{=} \lambda 0_V + \lambda 0_V$. Addiere $-(\lambda \cdot 0_V)$ von links; dies ergibt

$$\begin{aligned} -(\lambda 0_V) + \lambda 0_V &= -(\lambda 0_V) + (\lambda 0_V + \lambda 0_V) \\ &\overset{(V2)}{=} [-(\lambda 0_V) + \lambda 0_V] + \lambda 0_V \\ &\overset{(V4)}{=} 0_V + \lambda 0_V \\ &\overset{(V3)}{=} \lambda 0_V. \end{aligned}$$

Es folgt mit (V4), dass $0_V = \lambda 0_V$ ist.

ii) Mit den Körperaxiomen folgt: $0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v \overset{(V6)}{=} 0_K \cdot v + 0_K \cdot v$. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0_V &\overset{(V4)}{=} -(0_K \cdot v) + 0_K \cdot v = -(0_K \cdot v) + (0_K \cdot v + 0_K \cdot v) \\ &\overset{(V2)}{=} [-(0_K \cdot v) + 0_K \cdot v] + 0_K \cdot v \\ &\overset{(V4)}{=} 0_V + 0_K \cdot v \overset{(V3)}{=} 0_K \cdot v. \end{aligned}$$

iii) Es gilt $\lambda v + \lambda(-v) \overset{(V5)}{=} \lambda(v + (-v)) \overset{(V4)}{=} \lambda 0_V \overset{i)}{=} 0_V$. Addiere $-(\lambda \cdot v)$ zur letzten Gleichung von links, dann erhalten wir durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} & -(\lambda v) + (\lambda v + \lambda(-v)) = -(\lambda v) + 0_V \overset{(V3)}{=} -(\lambda v) \\ \overset{(V2)}{\Rightarrow} \quad & (-\lambda v + \lambda v) + \lambda(-v) = -(\lambda v) \\ \overset{(V4)}{\Rightarrow} \quad & 0_V + \lambda(-v) = -(\lambda v) \\ \overset{(V3)}{\Rightarrow} \quad & \lambda(-v) = -\lambda v. \end{aligned}$$

Mit den Körperaxiomen folgt:

$$\lambda v + (-\lambda) \cdot v \overset{(V6)}{=} (\lambda + (-\lambda)) \cdot v = 0_K \cdot v \overset{ii)}{=} 0_V.$$

Addiere $-(\lambda v)$ von links zur letzten Gleichung. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} & -\lambda v + [\lambda v + (-\lambda)\cdot v] = -\lambda v + 0_V \overset{(V3)}{=} -\lambda v \\ \overset{(V2)}{\Rightarrow}\quad & (-\lambda v + \lambda v) + (-\lambda)\cdot v = -\lambda v \\ \overset{(V4)}{\Rightarrow}\quad & 0_V + (-\lambda)\cdot v = -\lambda v \\ \overset{(V3)}{\Rightarrow}\quad & (-\lambda)\cdot v = -\lambda v. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$-\lambda v = (-\lambda)v = \lambda(-v).$$

iv) Sei $\lambda \neq 0_K$, das heisst, das Element λ^{-1} existiert. Mit den Körperaxiomen folgt:

$$v \overset{(V8)}{=} 1_K \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda)v \overset{(V7)}{=} \lambda^{-1}(\lambda v) \overset{(Vor)}{=} \lambda^{-1}0_V \overset{i)}{=} 0_V.$$

□

Beispiel 3.5. Seien V_1 und V_2 zwei K-Vektorräume, definiert ̈ber demselben Körper K. Die Menge

$$V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

ist ein K-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplikation definiert koordinatenweise, also mit $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ und $\lambda(v_1, v_2) := (\lambda v_1, \lambda v_2)$. $V_1 \times V_2$ heißt *direktes Produkt* von V_1 und V_2.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen der Axiome aus Definition 3.1; hierbei benutze wir die Vektorraumaxiome von V_1 und V_2.

(V1) Seien $v_1, v_1' \in V_1$ und $v_2, v_2' \in V_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) + (v_1', v_2') &= (v_1 + v_1', v_2 + v_2'), \\ &= (v_1' + v_1, v_2' + v_2), \\ &= (v_1', v_2') + (v_1, v_2). \end{aligned}$$

(V2) Analog.

(V3) Es gilt $(v_1, v_2) + (0_{V_1}, 0_{V_2}) = (v_1 + 0_{V_1}, v_2 + 0_{V_2}) = (v_1, v_2)$.

(V4) Zu $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ definiere $-(v_1, v_2) := (-v_1, -v_2)$. Dann gilt

$$(v_1, v_2) + (-v_1, -v_2) = (v_1 - v_1, v_2 - v_2) = (0_{V_1}, 0_{V_2}).$$

(V5) Es ist

$$\begin{aligned} \lambda\left((v_1, v_2) + (v_1', v_2')\right) &= \lambda(v_1 + v_1', v_2 + v_2'), \\ &= (\lambda(v_1 + v_1'), \lambda(v_2 + v_2')), \\ &= (\lambda v_1 + \lambda v_1', \lambda v_2 + \lambda v_2'), \\ &= (\lambda v_1, \lambda v_2) + (\lambda v_1', \lambda v_2'), \\ &= \lambda(v_1, v_2) + \lambda(v_1', v_2'). \end{aligned}$$

(V6),(V7) Analog.

(V8) Da V_1 und V_2 Vektorräume sind, gilt (V8) in V_1 und V_2. Also ist

$$1_K \cdot (v_1, v_2) = (1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2) = (v_1, v_2).$$

$\square$

Beispiel 3.6. Sei X eine nicht-leere Menge. Definiere $V \coloneqq \mathrm{Abb}(X, K)$ als die Menge aller Abbildungen von X nach K. Definiere Addition und Skalarmultiplikation als die Abbildungen

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V \text{ mit } (f, g) \mapsto f + g, \\ \cdot : K \times V \to V \text{ mit } (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f, \end{aligned}$$

wobei $(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$ und $(\lambda \cdot f)(x) \coloneqq \lambda \cdot f(x)$, für alle $x \in X$. Man sagt: Addition und Skalarmultiplikation sind *punktweise* definiert. Dann ist die Menge $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Der Nullvektor entspricht hier der Nullfunktion, also der Abbildung 0_V mit $0_V(x) \coloneqq 0_K$, für alle $x \in X$. Ferner definiere zu f die Funktion $(-f) : X \to K$ durch $(-f)(x) \coloneqq -f(x)$. Dann ist $-f$ das additive Inverse zu f.

Beispiel 3.7. Sei K ein Körper, beispielsweise $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$. Der *Grad* des Polynoms $f \coloneqq a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^n$ ist definiert als

$$\deg(f) \coloneqq \max\{k \in \mathbb{N} |\ a_k \neq 0\},$$

also als das maximale $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$. Definiere $\deg(0) = -\infty$.

a) Wir definieren $K_n[x]$ als die Menge aller Polynome in der Variablen x vom Grad höchstens n mit Koeffizienten in K, also

$$K_n[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n |\ a_i \in K \text{ mit } 0 \leq i \leq n\right\}.$$

Definiere Addition auf $K_n[x]$:

$$+ \ : \ K_n[x] \times K_n[x] \to K_n[x],\ (p, q) \mapsto p + q$$

Ist

$$p = \sum_{i=0}^n a_ix^i, \qquad q = \sum_{i=0}^n b_ix^i, \text{ mit } a_i, b_i \in K$$

dann definieren wir

$$\begin{aligned} p + q &\coloneqq \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n. \end{aligned}$$

Definiere Skalarmultiplikation auf $K_n[x]$

$$\cdot \ : \ K_n[x] \times K_n[x] \to K_n[x],\ (\lambda, p) \mapsto \lambda \cdot p$$

Ist $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, definiere

$$\lambda p = \lambda \cdot p := \sum_{i=0}^n (\lambda a_i) x^i.$$

Dann ist $(K_n[x], +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Hier ist $0_{K_n[x]} = \sum 0_K x^i$, das Nullpolynom. Zu $p = \sum a_i x^i$ definiere das additive Inverse $-p := \sum (-a_i) x^i$.

b) Sei weiterhin

$$K[x] = \left\{ p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K \right\}$$

die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in K. Für $p = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ und $q = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ sei ohne Einschränkung $m \leq n$. Schreibe $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_i = 0$ für $i \geq m$. Dann ist $p + q$ definiert wie in a). Analog für die Skalarmultiplikation. Die Menge $K[x]$ ist ein K-Vektorraum. Mit der üblichen Multiplikation von Polynomen ist $K[x]$ auch ein Ring. Ein Ring, der gleichzeitig eine K-Vektorraumstruktur besitzt, derart, dass Skalare mit allen Elementen kommutieren, heisst auch eine *K-Algebra*.

c) Die Menge aller Folgen

$$V := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} |\ a_n \in K\}$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein K-Vektorraum.

Beispiel 3.8. a) Sei $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i |\ a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $i = \sqrt{-1}$. Definiere Addition $+ \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $(x + yi, a + bi) \mapsto (x + a) + (y + b)i$. Definiere Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $(a + bi, x + yi) \mapsto (ax - by) + (ay + bx)i$. Dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper.

Beachte: durch das Einschränken der Abbildungen $+$ und $\cdot$ erhalten wir Addition und Multiplikation reeller Zahlen:

$$\begin{aligned} +_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a, x) \mapsto (a + x) + 0 \cdot i, \\ \cdot_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a, x) \mapsto \underbrace{(ax - 0)}_{=ax} + \underbrace{(a \cdot 0 + 0 \cdot x) \cdot i}_{=0}. \end{aligned}$$

Damit ist also $\mathbb{R}$ abgeschloßen bezüglich $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{C}$. Man nennt $\mathbb{R}$ einen Teilkörper von $\mathbb{C}$.

b) Sei K ein Körper und $K' \subseteq K$ eine Teilmenge, so dass K' mit Einschränkung der Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von K auf K' selbst auch ein Körper ist. Dann heißt K' ein *Teilkörper* von K, beziehungsweise K heisst auch ein *Erweiterungskörper* von K'. In dieser Situation ist dann K ein K'-Vektorraum, wobei $+ : K \times K \to K$ der Körperaddition und $\cdot : K' \times K \to K$ der Körpermultiplikation eingeschränkt auf die Teilmenge $K' \times K \subseteq K \times K$ entspricht. Es ist also $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum beziehungsweise $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Beispiel 1.21 zeigt auch, dass $\mathbb{F}_4$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist, mit $\mathbb{F}_2 = \{O, I\}$.

Beispiel 3.9. a) Sei $(V,+)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0_V und $v+v=0$, für alle $v \in V$. Dann ist V ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum.

Beweis. Definiere eine Skalarmultiplikation auf V durch $\mathbb{Z}_2 \times V \to V$ mit $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, wobei

$$\lambda \cdot v = \begin{cases} .0_V & \text{falls } \lambda = \overline{0}, \\ v & \text{falls } \lambda = \overline{1} \end{cases}$$

i) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe, also gelten (V1) bis (V4).

ii) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \overline{0} \cdot (u+v) &= 0_V \\ \overline{0} \cdot u &= 0_V \\ \overline{0} \cdot v &= 0_V. \end{aligned}$$

Damit folgt $\overline{0} \cdot (u+v) = \overline{0}u + \overline{0}v$, für alle $u, v \in V$. Also gilt (V5).

iii) Für $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} (\overline{0}+\overline{0}) \cdot v &\overset{\text{gilt in } \mathbb{Z}_2}{=} \overline{0} \cdot v \overset{Def.}{=} 0_V \overset{(V3)}{=} 0_V + 0_V \overset{Def.}{=} \overline{0} \cdot v + \overline{0} \cdot v \\ (\overline{0}+\overline{1}) \cdot v &= \overline{1} \cdot v = v = 0_V + v = \overline{0} \cdot v + \overline{1} \cdot v \\ (\overline{1}+\overline{0}) \cdot v &= \overline{1} \cdot v = v = v + 0_V = \overline{1} \cdot v + \overline{0} \cdot v \\ (\overline{1}+\overline{1}) \cdot v &= \overline{0} \cdot v = 0_V = v + v = \overline{1} \cdot v + \overline{1} \cdot v. \end{aligned}$$

Also gilt (V6).

iv) (V7) sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

v) (V8) gilt nach Definition.

□

b) Sei X eine nicht-leere Menge und $M := \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X. Definiere für $S, T \subseteq X$ (also $S, T \in M$) die Addition $+$: $M \times M \to M$ mit

$$(S,T) \mapsto S + T := (S \cup T) \setminus (S \cap T) = \{x \in S \cup T |\ x \notin S \cap T\}$$

Wir nennen $(S \cup T) \setminus (S \cap T)$ auch *symmetrische Differenz* der Mengen S und T. Für eine graphische Veranschaulichung, siehe Abbildung 3.2.

Dann gilt $S+T = T+S$, da $S \cup T = T \cup S$ und $S \cap T = T \cap S$. Außerdem ist

$$S + S = (S \cup S) \setminus (S \cap S) = S \setminus S = \emptyset$$

und

$$S + \emptyset = (S \cup \emptyset) \setminus (S \cap \emptyset) = S \setminus \emptyset = S.$$

Also ist $\emptyset$ das neutrale Element der Addition. Man kann am einfachsten graphisch – auch wenn das kein formal sauberer Beweis ist – zeigen, dass die Verknüpfung $+$ assoziativ ist. Also $(S+T)+U = S+(T+U)$, für alle $S, T, U \in M$.

Damit ist $(M,+)$ eine abelsche Gruppe mit $S + S = 0_M = \emptyset$, für alle $S \in M$. D.h. M ist ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum nach a).

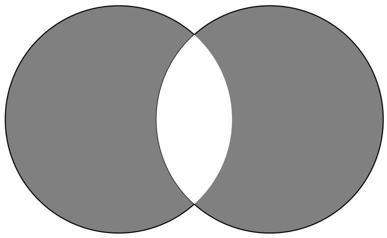

Abbildung 3.2: Skizze der symmetrischen Differenz.

Definition 3.10. a) Sei V ein K-Vektorraum. Eine nicht-leere Menge $W \subseteq V$ heißt *Unterraum* (oder *Teilraum*) *von* V, falls W mit Einschränkung der Addition und Skalarmultiplikation von V ein K-Vektorraum ist.

b) Wir fordern in a), dass W abgeschlossen ist bezüglich Addition und Skalarmultiplikation von V, d.h.

$$\begin{aligned} x + y \in W \quad \forall x, y \in W, \\ \lambda x \in W \quad \forall \lambda \in K,\ \forall x \in W. \end{aligned}$$

Wir schreiben $W \leq V$, gesprochen „W ist ein Unterraum von V“.

Lemma 3.11 (Unterraumkriterium)**.** *Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn*

i) $0_V \in W$,

ii) $x + y \in W$ *für alle* $x, y \in W$,

iii) $\lambda \cdot x \in W$ *für alle* $\lambda \in K$ *und* $x \in W$.

Beweis. a) Sei W ein Unterraum von V. Dann gelten ii) und iii) nach Definition 3.10. Nach Definition 3.10 gilt $W \neq \emptyset$. Sei $w \in W$, dann folgt nach iii), dass $(-1) \cdot w \in W$. Da

$$w + (-1)w = 1 \cdot w + (-1) \cdot w = (1 + (-1))w = 0_K \cdot w = 0_V,$$

ist nach ii) der Nullvektor 0_V in W.

b) Angenommen i) bis iii) gelten. Nach i) gilt $W \neq \emptyset$ und nach ii) und iii), dass W abgeschlossen bezüglich $+$ und $\cdot$ ist. Wir prüfen ob die Vektorraumaxiome (V1) bis (V8) gelten:

- V ist ein Vektorraum, das heißt (V1) gilt in V. Da $W \supseteq V$ gilt auch (V1) in W. Analog folgen auch (V2) und (V5) bis (V8).
- Nach i) gilt: $0_V \in W$. Da V ein Vektorraum ist, gilt (V3) in V, das heisst, $v + 0_V = v = 0_V + v$ für alle $v \in V$. Da $W \subseteq V$, folgt $w + 0_V = w = 0_V + w$ für alle $w \in W$. Da der Nullvektor eines Vektorraumes eindeutig bestimmt ist, siehe Bemerkung 3.2, folgt $0_W = 0_V$.

- Sei $w \in W$. Da V ein Vektorraum ist, gilt (V4) in V. Zu $w \in W \subseteq V$ existiert ein $-w \in V$ mit $w + (-w) = 0_V$. Nach iii) gilt $-w = (-1) \cdot w \in W$. Also existiert zu $w \in W$ ein $-w \in W$ mit $w + (-w) = 0_V$. Also gilt (V4) in W.

$\square$

Lemma 3.12 (Unterraumkriterium). *Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $\emptyset \neq W \subseteq V$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta \in K$ und $x, y \in W$ gilt $\alpha x + \beta w \in W$.*

Beweis: Übung.

Beispiel 3.13. Wir geben verschiedene Beispiele von Untervektorräumen.

1. Sei V ein K-Vektorraum. Es gilt $\{0_V\} \leq V$ und $V \leq V$. Ein Unterraum W von V heißt *echter* Unterraum, falls $W \neq V$ gilt. Ein Unterraum W heißt *nicht-trivialer* Unterraum von V, falls $W \neq \{0_V\}$.

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$. Dann ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Jede Gerade durch den Nullpunkt $(0,0)$ des Koordinatensystems ist ein Unterraum von V.

   Beweis. Sei L eine Gerade durch den Ursprung. Dann lässt L sich schreiben als $L = \{\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$, für ein $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir überprüfen die drei Bedingungen in Lemma 3.11:

   i) Es gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in L$.

   ii) Seien $x, y \in L$. Dann existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $y = \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Somit ist $x + y = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Da $\mathbb{R}$ abgeschloßen ist bezüglich Addition, gilt $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$ und somit $x + y \in L$.

   iii) Sei $x \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Da $\mathbb{R}$ abgeschloßen ist bezüglich Multiplikation, gilt $\alpha\lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist

   $$\alpha \cdot x = \alpha\Big(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big) = (\alpha\lambda) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in L.$$

   Nach Lemma 3.11 ist L ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. $\square$

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$. Jede Gerade durch den Ursprung $0_V = (0,0,0)^T$ des Koordinatensystems ist ein Unterraum von V. Jede Ebene, die den Koordinatenursprung enthält, ist ein Unterraum von V.

4. Sei $V = M_2(K)$ und sei W die Menge der *oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen in K*:
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in K \right\}.$$
Dann ist W ein Unterraum von V. Analog gilt dies natürlich auch für die Teilmenge der oberen Dreiecksmatrizen in $M_n(K)$, oder für die *strikten oberen Dreiecksmatrizen*, bei denen alle Einträge auf der Diagonalen (also $a = c = 0$ in der Notation oben für $n = 2$) ebenfalls Null sind.

5. Die Menge V =Abb$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum nach Beispiel 3.6. Sei $U := \{f \in V \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$. Mit Hilfe der Ableitungsregeln aus der Analysis folgt: $U \leq V$ ist ein Unterraum.

Beispiel 3.14. Klassifikation der Unterräume von $\mathbb{R}^2$.

a) Sein $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(c, d) \neq (0, 0)$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$, welche nicht auf derselben Geraden durch $(0, 0)$ liegen. Wir behaupten

   i) $ad - bc \neq 0$;

   ii) jedes $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ lässt sich schreiben als
   $$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$
   für (eindeutige) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis. i) Angenommen $ad - bc = 0$, d.h. $ad = bc$.

- Ist $b \neq 0$, so folgt
$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{d}{b} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$
das heisst, die Vektoren liegen auf derselben Gerade. Dies steht im Widerspruch zur Vorraussetzung. Es folgt also $b = 0$.
- Ist $a \neq 0$, so folgt
$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$
Dies steht wieder im Widerspruch zur Vorraussetzung. Es folgt also $a = 0$.

Also folgt $(a, b) = (0, 0)$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also ist die Annahme $ad - bc = 0$ falsch, dass heißt $ad - bc \neq 0$.

ii) Sei $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$
das heisst, wir müssen das folgende lineare Gleichungssystem lösen:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen $ad - bc \neq 0$. Es gilt

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Genauso gilt

$$A \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Da $A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und A invertierbar, folgt also

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1}A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Also existieren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

$\square$

b) *Behauptung*: Sei $W \leq \mathbb{R}^2$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

   i) $W = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ oder
   ii) $W = \mathbb{R}^2$ oder
   iii) W ist eine Gerade durch $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Beweis. Wir schreiben hier salopperweise statt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ auch (a,b). Sei $W \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ und $W \leq \mathbb{R}^2$. Dann gibt es ein Vektor $(a,b) \in W$ mit $(a,b) \neq (0,0)$. Sei $L := \{\lambda(a,b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch $(0,0)$ und (a,b). Da $W \leq \mathbb{R}^2$ und $(a,b) \in W$, folgt $L \subseteq W$. Angenommen es sei $L \neq W$. Dann gäbe es ein $(0,0) \neq (c,d) \in W \setminus L$. Dann liegen (a,b) und (c,d) in W aber nicht auf der selben Geraden durch den Ursprung $(0,0)$. Also

$$\left\{\lambda_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\} \subseteq W.$$

Mit a)ii) folgt $W = \mathbb{R}^2$. $\square$

Ist $W \leq \mathbb{R}^3$ Unterraum, so gilt: $W = \{0_V\}$ oder W ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung 0_V oder W ist eine Ebene durch 0_V oder $W = \mathbb{R}^3$.

Beispiel 3.15. Sei $V = K^n$. Sei $A = M_{m\times n}(K)$. Dann ist

$$L_A \coloneqq \{x \in K^n \mid Ax = 0_V\},$$

die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, ein Unterraum von V.

Beweis. i) Es gilt $A \cdot 0_V = 0_V$. Also $0_V \in L_A$.

ii) Seien $x, y \in L_A$. Dann ist $Ax = 0$ und $Ay = 0$. Es gilt

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0,$$

also ist $x + y \in L_A$.

iii) Sei $x \in L_A$ und $\lambda \in K$. Dann ist $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot 0 = 0$. Also $\lambda x \in L_A$.

Nach Lemma 3.11 folgt, L_A ist ein Unterraum von K^n. □

Beispiel 3.16. Sei V ein K-Vektorraum mit den Unterräumen U_1 und U_2. Dann ist

a) $U_1 \cap U_2 = \{u \mid u \in U_1 \text{ und } u \in U_2\}$

b) $U_1 + U_2 \coloneqq \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

jeweils ein Unterraum von V.

Beweis. a) i) Da $U_1 \leq V$ und $U_2 \leq V$, ist $0_V \in U_1$ und $0_V \in U_2$. somit ist auch $0_V \in U_1 \cap U_2$.

ii) Sei $x, y \in U_1 \cap U_2$, dann ist $x \in U_1$ und $x \in U_2$, sowie $y \in U_1$ und $y \in U_2$. Da U_1 und U_2 unterräume sind, ist $x + y \in U_1$ und $x + y \in U_2$, also $x + y \in U_1 \cap U_2$.

iii) Sei $x \in U_1 \cap U_2$ und $\lambda \in K$. Dann ist $x \in U_1$ und $x \in U_2$. Da die beiden Unterräume abgeschlossen bezüglich der skalaren Multiplikation sind, ist auch $\lambda x \in U_1, U_2$ und somit ist auch $\lambda x \in U_1 \cap U_2$.

Mit Lemma 3.11 folgt: $U_1 \cap U_2 \leq V$.

b) i) Da $0_V \in U_1$ und $0_V \in U_2$ folgt $0_V + 0_V \overset{\text{(V3)}}{=} 0_V \in U_1 + U_2$.

ii) Sei $x, y \in U_1 + U_2$. Die Definition von $U_1 + U_2$ besagt, dass $\exists x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$ mit $x = x_1 + x_2$, sowie $y_1 \in U_1$ und $y_2 \in U_2$ mit $y = y_1 + y_2$. Dann ist $x_1 + y_1 \in U_1$ und $x_2 + y_2 \in U_2$, weil U_1 und U_2 abgeschlossen bezüglich der Addition sind. Damit ist $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in U_1 + U_2$, da die Addition in V kommutativ und assoziativ ist.

iii) Seien $x \in U_1 + U_2$ und $\lambda \in K$. Dann gibt es ein $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$ mit $x = x_1 + x_2$. Da U_1 und U_2 abgeschlossen bezüglich $\cdot$ sind, gilt $\lambda x_1 \in U_1$ und $\lambda x_2 \in U_2$. Somit ist $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in U_1 + U_2$.

Mit Lemma 3.11 folgt: $U_1 \cap U_2 \leq V$.

□

Beispiel 3.17. Die Vereinigung zweier Vektorräume ist im Allgemeinen kein Vektorraum. Betrachte beispielsweise $V = \mathbb{R}^2$ mit den beiden Unterräumen

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann entspricht $W_1 \cup W_2$ genau den Achsen des kartesischen Koordinatensystems. Es ist $W_1 \cup W_2$ kein Vektorraum, weil z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2.$$

Beispiel 3.18. Sei V ein K-Vektorraum, $v \in V$. Dann ist

$$K \cdot v \coloneqq \operatorname{Span}\{v\} \coloneqq \langle v \rangle \coloneqq \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$$

ein Unterraum von V.

Beweis. i) Da $0_K \cdot v \overset{3.4}{=} 0_V$, ist $0_V \in \operatorname{Span}\{v\}$.

ii) Seien $x, y \in \operatorname{Span}\{v\}$. Dann gibt es $\lambda, \mu \in K$, mit $x = \lambda v$ und $y = \lambda v$. Damit folgt $x + y = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v \in \operatorname{Span}\{v\}$, da K abgeschlossen ist bezüglich Addition.

iii) Sei $x \in \operatorname{Span}\{v\}$ und $\alpha \in K$. Dann gibt es ein $\lambda \in K$ mit $x = \lambda v$. Damit gilt $\alpha x = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v \in \operatorname{Span}\{v\}$, da K abgeschlossen ist bezüglich Multiplikation.

Mit Lemma 3.11 folgt: $K \cdot v \leq V$. $\square$

Kapitel 4

Linearkombinationen

Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. In diesem Kapitel definieren wir Linearkombinationen von Vektoren und, darauf aufbauend, zwei fundamentalen Konzepte: das Erzeugnis einer Menge von Vektoren und die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren. Mit diesen neuen Konzepten, lassen sich Vektorräume genauer beschreiben.

Definition 4.1. Sei $S \subseteq V$.

a) Eine *Linearkombination von S* ist ein Vektor der Form $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in S$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Man nennt $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ auch Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ mit Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

b) Falls $S \neq \emptyset$, definiere die Menge $\operatorname{Span}(S) := \langle S \rangle$ als die Menge aller Linearkombinationen von endlich vielen Elementen von S:

$$\operatorname{Span}(S) := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}, v_1, \ldots, v_n \in S, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \text{ mit } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\}.$$

Wir definieren $\operatorname{Span}(\emptyset) = 0_V$. Die Menge $\operatorname{Span}(S)$ heißt *Erzeugnis von S*. Ist $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, schreibe wir auch

$$\langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Um den zugrundeliegenden Körper K in einem zu bildenden Erzeugnis einer Menge S anzudeuten, benutzt man auch die Notation

$$K - \operatorname{Span}(S) = \operatorname{Span}_K(S) = \langle S \rangle_K.$$

c) S heißt *Erzeugendensystem* von V, falls $\operatorname{Span}(S) = V$ ist. Wir sagen in diesem Fall auch, die Menge S *erzeugt* den Vektorraum V.

Lemma 4.2. *Sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge von Vektoren eines Vektorraums V.*

a) Es ist $\operatorname{Span}(S) \leq V$ *Unterraum mit* $S \subseteq \operatorname{Span}(S)$.

b) Ist $U \leq V$ Unterraum mit $S \subseteq U$, so folgt $\operatorname{Span}(S) \subseteq U$. *Insbesondere ist also* $\operatorname{Span}(S)$ *der kleinste Unterraum von V, der S enthält.*

Beweis. a) i) Ist $S = \emptyset$, so gilt $\mathrm{Span}(S) = \{0_V\}$, also $0_V \in \mathrm{Span}(S)$. Sei $S \neq \emptyset$, dann existiert $v \in S$. Nach Lemma 3.4 gilt $0_K \cdot v = 0_V$. Da $0_K \cdot v$ eine Linearkombination von S ist, gilt $0_V \in \mathrm{Span}(S)$.

ii) Seien $v, v' \in \mathrm{Span}(S)$ und $\lambda \in K$. Da v und v' endliche Linearkombinationen von Elementen aus S sind, sind $v+v'$ und $\lambda \cdot v$ auch endliche Linearekombinationen von Elementen aus S. Damit gilt $v + v', \lambda v \in \mathrm{Span}(S)$. Mit Lemma 3.11 folgt: $\mathrm{Span}(S) \leq V$.

iii) Sei $v \in S$. Da $1 \cdot v = v$, ist v eine Linearkombination von S. Also gilt $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$.

b) Sei $U \leq V$ ein Unterraum mit $S \subseteq U$. Da U abgeschloßen bezüglich $+$ und $\cdot$ und $S \subseteq U$, gilt $\mathrm{Span}(S) \subseteq U$. Nach a) ist $S \subseteq \mathrm{Span}(S) \leq V$ Unterraum. Also ist $\mathrm{Span}(S)$ der kleinste Unterraum von V, der S enthält.

$\square$

Bemerkung 4.3. a) Ist $S \subseteq V$ ein Unterraum, so folgt $\mathrm{Span}(S) = S$.

Beweis. i) Nach 4.2 ist $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$.

ii) Da S ein Vektorraum ist, ist S abgeschloßen bezüglich Addition und Skalarmultiplikation. Also $\mathrm{Span}(S) \subseteq S$.

Also gilt $S = \mathrm{Span}(S)$. $\square$

b) Ist $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, so ist $\mathrm{Span}(S) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K\} = Kv_1 + \dots + Kv_n$.

Beweis. Nach 3.18 gilt Kv_i ist ein Unterraum von V. Also auch $Kv_1 + \dots + Kv_n \leq V$ nach 3.16 mit $S \subseteq \sum Kv_i$. Nach 4.2 folgt: $\mathrm{Span}(S) \subseteq \sum Kv_i$. Da $v_i \in S$ für alle i, gilt auch $\sum Kv_i \subseteq \mathrm{Span}(S)$. $\square$

Beispiel 4.4. a) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Nach 3.14 gilt: Sind $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$ welche nicht auf derselben Geraden durch den Nullpunkt liegen, dann läßt sich jeder Vektor $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ schreiben als

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Es ist also $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Es gibt also viele verschiedene Erzeugendensysteme für $\mathbb{R}^2$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \neq \mathbb{R}^2.$$

Ein Vektor des $\mathbb{R}^2$ erzeugt also niemals $V = \mathbb{R}^2$.

c) Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$ derart, dass $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ nicht auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen. Dann gilt

$$\mathbb{R}^2 \overset{a)}{=} \operatorname{Span}\{v_1, v_2\} \subseteq \operatorname{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Also gilt $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathbb{R}^2$.

Beispiel 4.5. a) Sei $V = M_2(\mathbb{R})$. Behauptung: $S_1 := \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ erzeugt V.

Beweis. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist

$$A = a \cdot E_{11} + b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22}.$$

Jedes $A \in V$ läßt sich also als Linearkombination von S_1 schreiben. Damit gilt $\operatorname{Span}(S_1) = V$. □

Allgemeiner: für $n, m \in \mathbb{N}$ ist $M_{n\times m}(\mathbb{R}) = \operatorname{Span}\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$, denn $A = \sum_i \sum_j a_{ij} E_{ij}$ für $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

b) Wir zeigen, dass die Menge $S_2 := \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ den Vektorraum $V = M_2(\mathbb{R})$ erzeugt, also $\operatorname{Span}(S_2) = V$ gilt.

Beweis. „$\supseteq$“: Nach Definition gilt $\operatorname{Span}(S_2) \subseteq V$.

„$\subseteq$“: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ ein beliebiges Element. Angenommen wir haben

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dann entspricht dies einem linearen Gleichungssystem mit erweiterter Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right).$$

Die Zeilen-reduzierte Stufenform dieser Matrix ist dann (siehe 2.9)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a+b-c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+d-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+b-c-d \end{array}\right).$$

Das lineare Gleichungssystem hat also eine (eindeutige) Lösung. Wähle

$$\begin{aligned} \alpha &= a+b-c, \\ \beta &= c+d-a, \\ \gamma &= c-b, \\ \delta &= a+b-c-d. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\mathrm{Span}(S_2) = V$.

$\square$

Beispiel 4.6. a) Sei $V = \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Span}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \\ &= \mathrm{Span}\{1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+\cdots+x^n\}. \end{aligned}$$

Beweis. Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$.

i) Vektor $a_0 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ist Linearkombination von $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Also ist f $\mathrm{Span}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} = \mathbb{R}_n[x]$.

ii) Sei $f = a_0 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[x]$. Dann $f = a_n(1 + x + \cdots + x^n) + (a_{n-1} - a_n)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) + (a_{n-2} - a_{n-1})(1 + x + \cdots + x^{n-2}) + \cdots + (a_0 - a_1) \cdot 1$. Also ist $\mathrm{Span}\{1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+\cdots+x^n\} = \mathbb{R}_n[x]$.

$\square$

b) Sei $S = \{f, g\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ mit $f = 1 + 2x + x^2$ und $g = 2 + x^2$. Die Menge S erzeugt $\mathbb{R}_2[x]$ nicht.

Beweis. Sei $h \in \mathbb{R}_2[x]$ mit $h(x) = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist

	$f(x)$	$g(x)$
$x = 0$	1	2
$x = 1$	4	3
$x = -1$	0	3

.

Angenommen es existiert $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $h = \lambda \cdot f + \mu \cdot g$; dann ist

$$1 = \lambda f(x) + \mu g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt dann

$$\begin{aligned} x = 0 &: \quad 1 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 2, \\ x = 1 &: \quad 1 = \lambda \cdot 4 + \mu \cdot 3, \\ x = -1 &: \quad 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 3. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt $\mu = 1/3$ und $\lambda = 0$. Eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir den Widerspruch $1 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Es gibt also keine $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $h = \lambda \cdot f + \mu \cdot g$, und es folgt, $\operatorname{Span}\{f, g\} \neq \mathbb{R}_2[x]$. $\square$

Definition 4.7. Sei $S \subseteq V$. Die Menge S heißt *linear abhängig*, falls es (endlich viele paarweise verschiedene Vektoren) $v_1, \ldots, v_n \in S$ gibt und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, die nicht alle Null sind, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V.$$

Andernfalls heißt S *linear unabhängig*. Die Menge S ist also linear unabhängig, falls, wenn immer $v_1, \ldots, v_n \in S$ paarweise verschieden sind und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ existieren mit $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$, dann folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Bemerkung 4.8. Sei $S = \{0_V, v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ (beziehungsweise allgemeiner $0_V \in S$ beliebig), dann ist S linear abhängig. Wähle $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ und $\lambda_0 = 1$, dann ist

$$\lambda_0 0_V + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V,$$

mit $\lambda_0 \neq 0$.

Beispiel 4.9. a) Seien $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$ welche nicht auf derselben Geraden durch den Nullpunkt liegen. Wir behaupten, dass die Menge $S := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig ist.

Beweis. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Angenommen $\lambda_1 \neq 0$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Also liegen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ auf derselben Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist. Es folgt $\lambda_1 = 0$, und damit $\lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, folgt $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Also ist S linear unabhängig. $\square$

Zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ oder $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ oder $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ sind jeweils linear unabhängige Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.

b) Seien $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$, beide ungleich Null, auf derselben Gerade durch den Ursprung. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heisst, $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$ sind linear abhängig.

Beispiel 4.10. Sei $V = \mathbb{R}^3$.

a) Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wähle $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ und $\lambda_3 = -1$, dann ist

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0.$$

Also ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig.

b) Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Angenommen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 + R_3 &\Rightarrow \lambda_2 = 0, \\ R_2 - 2R_1 &\Rightarrow \lambda_3 = 0, \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

Beispiel 4.11. Sei $V = \mathbb{R}^3$. Analog zum Beispiel 3.14 und 4.9 gilt:

i) Zwei Vektoren $\{v_1, v_2\}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht auf derselben Geraden durch 0_V liegen.

ii) Drei Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht auf derselben Ebene durch 0_V liegen.

iii) Vier oder mehr Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig.

Beispiel 4.12. Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sei $S = \{f, g, h\}$ mit

$$f(x) = e^{2x}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x.$$

Angenommen $\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h = 0$ für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. D.h. $\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x = 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Wähle $x = 0$, dann gilt $\lambda_1 = 0$. Für $x = 1$ bzw. $x = -1$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 =& 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 =& 0. \end{aligned}$$

Es folgt $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$. Also ist S linear unabhängig.

Kapitel 5

Basen von Vektorräumen

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. In diesem Kapitel führen wir sogenannte Basen von Vektorräumen ein. Hierzu wiederholen wir zunächst die wichtige Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren. Konkrete Beispiele hierzu haben wir bereits im letzten Kapitel behandelt, und ihr Verständnis ist wichtig, um nun die Theorie weiter zu entwickeln.

Definition 5.1. $S \subseteq V$ heißt *linear unabhängig*, falls wenn immer $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in S$, dann folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_K$. Anderenfalls heißt S *linear abhängig.*

Bemerkung 5.2.

a) $\emptyset$ ist linear unabhängig. Eine Menge S, die den Nullvektor 0_V enthält ist linear abhängig.

b) Ist $S \subseteq V$ linear unabhängig, dann ist auch jede Teilmenge von S wiederum linear unabhängig.

c) Ist $S \subseteq V$ linear abhängig, dann ist auch jede Menge T mit $S \subseteq T \subseteq V$ linear abhängig.

d) Ist S linear unabhängig in einem Teilraum $W \leq V$, dann ist auch S linear unabhängig in V.

Lemma 5.3.

a) Seien $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig, und sei $v \in V$. Dann gilt:

i) $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $v \notin \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

ii) $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

b) $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ ist linear abhängig genau dann, wenn es ein $1 \leq i \leq n$ gibt mit $v_i \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage. Die anderen beiden Aussagen sind lediglich Umformulierungen der ersten Aussage.

„$\Leftarrow$“ : Sei $v \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, dann existiert $\lambda_i \in K$ mit $v = \sum \lambda_i v_i$. Also

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + (-1)v,$$

wobei der Koeffizient von v ungleich Null ist. Nach Definition 5.1 ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ linear abhängig.

„⇒“ : Sei $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ linear abhängig. Aus Definition 5.1 folgt: existieren $\lambda_i, \lambda \in K$, nicht alle Null, mit

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0.$$

Angenommen $\lambda = 0$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0.$$

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 = \lambda$, ein Widerspruch zu Voraussetzung. Also ist $\lambda \neq 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} \lambda v &= \sum_{i=1}^{n} -\lambda_i v_i \\ \Rightarrow v &= \sum_{i=1}^{n} -\lambda_i \lambda^{-1} v_i \\ \Rightarrow v &\in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Lemma 5.3 gilt auch für unendlichen Mengen $S \subseteq V$.

Theorem 5.4. *Sei $\{0\} \neq V$ ein K-Vektorraum. Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Es sind äquivalent:*

1) S ist maximal (=unverlängerbar) linear unabhängig in V.

2) S ist ein minimales (=unverkürzbares) Erzeugendensystem von V.

3) S ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.

4) S ist ein Erzeugendensystem von V, aus dem sich jedes $v \in V$ eindeutig linear kombinieren läßt.

Beweis. Wie zeigen 1) ⇒ 4) ⇒ 3) ⇒ 2) ⇒ 1).

1) ⇒ 4)
- i) Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ maximal linear unabhängig. Dann ist $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ linear abhängig für alle $v \in V$. Also $v \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$, für alle $v \in V$. Daraus folgt $V \leq \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\} \leq V$, und damit $V = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.
- ii) Angenommen $v \in V$ mit $\sum \lambda_i v_i = v = \sum \mu_i v_i$, für $\lambda_i, \mu_i \in K$. Dann ist $0 = \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i$. Da die Vektoren $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i - \mu_i = 0$, für alle i. Also $\lambda_i = \mu_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

4) ⇒ 3) Angenommen $0 = \sum \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in K$. Es gilt aber auch die Darstellung $0 = \sum 0 \cdot v_i$; daher folgt nach Voraussetzung 4): $\lambda_i = 0$ für alle i. Also ist $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig.

3) $\Rightarrow$ 2) Nach Voraussetzung ist S ein Erzeugendensystem von V. Angenommen S ist kein minimales Erzeugendensystem von V, dann existiert ein Vektor in S, der nicht nötig ist, um V zu erzeugen. Ohne Einschränkung sei dies v_n. Dann ist $V = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ und $v_n \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Nach Lemma 5.3 folgt, dass $S = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ linear abhängig ist. Dies ist aber im Widerspruch zur Voraussetzung, also ist S ein minimales Erzeugendensystem.

2) $\Rightarrow$ 1)
   i) Nach Voraussetzung ist S ein minimales Erzeugendensystem von V. Angenommen S ist linear abhängig, dann existiert nach Lemma 5.3 ein $k \in K$ mit $v_k = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\} = \operatorname{Span} S \setminus \{v_k\}$. Dann ist $\operatorname{Span}(S) = \operatorname{Span}(S \setminus \{v_k\})$. Damit ist S nicht ein kleinstes Erzeugendensystem, was nach Voraussetzung nicht sein kann. Demnach muss S linear unabhängig sein.

   ii) Angenommen S ist linear unabhängig, aber nicht maximal linear unabhängig. Dann existiert ein Vektor $v \in V$ so, dass $S \cup \{v\}$ linear unabhängig ist. Nach Lemma 5.3 gilt $v \notin \operatorname{Span} S$. Damit ist aber $V \neq \operatorname{Span} S$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. Also ist S maximal linear unabhängig.

$\square$

Definition 5.5. Sei V ein K Vektorraum

a) Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt eine *Basis* von V, falls

   i) B linear unabhängig,

   ii) $\operatorname{Span} B = V$.

   Eine Basis ist also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, und damit ebenfalls durch die äquivalenten Aussagen in Theorem 5.4 charakterisiert.

b) Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Der Spaltenvektor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in K^n$, der durch $v = \sum \lambda_i v_i$ nach Theorem 5.4 eindeutig definiert ist, heißt *Koordinatenvektor* von $v \in V$ bezüglich der Basis B. Für die Definition des Vektors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$, siehe Definition 6.1.

Beispiel 5.6. 1) $V = \{0_V\}$ hat die Basis $\emptyset$.

2) $V = K^n$ hat die Basis $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, wobei e_i definiert ist als Vektor mit allen Einträgen Null, ausser einer Eins an der i-ten Stelle. Dann gilt für einen beliebigen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ die Gleichung $x = \sum x_i e_i$, also ist $\in \operatorname{Span} \mathcal{E}$. Die Menge $\mathcal{E}$ ist linear unabhängig. Man nennt $\mathcal{E}$ *Standardbasis* von K^n.

3) Ein Vektorraum kann verschiedene Basen haben. Zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ hat Basis $\{(a,b)^T, (c,d)^T\}$, für beliebige Vektoren $0_V \neq (a,b)^T$ und $0_V \neq (c,d)^T$ in $\mathbb{R}^2$, die nicht auf derselben Geraden durch 0_V liegen.

   Zum Beispiel ist die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 = (1,1)^T, v_2(1,2), v_3 = (2,1)^T \in \mathbb{R}^2$ keine Basis von $\mathbb{R}^2$, während $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ und $\{v_2, v_3\}$ drei mögliche Basen von $\mathbb{R}^2$ sind.

4) a) $M_{m\times n}(K)$ hat Basis

$$\mathcal{E} := \{E_{ij}, \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Man nennt $\mathcal{E}$ *Standardbasis* von $M_{m\times n}(K)$.

b) Sei $V = M_2(\mathbb{R})$. Dann ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

nach Beispiel 4.5 ein Erzeugendensystem von V. Der Leser kann leicht nachprüfen, dass diese Menge von Vektoren auch linear unabhängig ist.

c) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$v = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Koordinatenvektor von v ist also $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum hat die Basis $\{1, i\}$.

Definition 5.7. Ein K-Vektorraum V heißt *endlich erzeugt*, falls es eine endliche Teilmenge $S \subseteq V$ gibt mit $V = \operatorname{Span}(S)$.

Theorem 5.8 (Basisauswahlsatz)**.** *Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum hat eine (endliche) Basis. Genauer: Ist $V = \operatorname{Span}(S)$ und $|S| = n < \infty$, dann existiert eine Teilmenge $B \subseteq S$ mit B Basis von V.*

Beweis. a) Ist $V = \{0_V\}$, so ist $\emptyset$ die Basis von V ist. Sei also $V \neq \{0_V\}$ und $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $\operatorname{Span}(S) = V$. Angenommen $v_i = 0$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $V = \operatorname{Span}(S) = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$. Ohne Einschränkung sei also $v_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$.

b) i) Sei $n = 1 = |S|$, d.h. $S = \{v_1\}$. Da $v_1 \neq 0$, ist S linear unabhängig. Also ist S eine Basis von V.

ii) Sei die Behauptung nun wahr für alle Vektorräume, die von weniger als n Elementen erzeugt werden.

iii) Sei $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $\operatorname{Span}(S) = V$. Ist S linear unabhangig, dann ist S eine Basis von V. Angenommen S ist linear abhängig, dann gibt es nach Lemma 5.3 einen Index i mit $v_i \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$. Damit ist $V = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \operatorname{Span}(S \setminus \{v_i\})$, d.h. V wird von $n-1$ Elementen erzeugt. Nach Induktionsvorraussetzung existiert eine Teilmenge B von S, mit B ist eine Basis von V.

□

Beispiel 5.9. Sei $V = \mathbb{R}^3$, und gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Wir konstuieren eine Teilmenge dieser Vektoren, die eine Basis von V bildet:

i) Finde eine lineare Abhängigkeit zwischen den Vektoren $\{v_i\}_{i=1,\dots,5}$, beispielsweise ist

$$v_3 = v_1 + v_2, \text{ beziehungsweise es ist } v_1 + v_2 + (-1)v_3 = 0.$$

Also ist $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_5\} = \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$.

ii) Finde eine lineare Abhängigkeit zwischen den Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5, beispielsweise ist

$$v_1 - v_2 + v_4 - v_5 = 0.$$

Also ist $\operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_4, v_5\} = \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_4\}$.

iii) Da $S = \{v_1, v_2, v_4\}$ linear unabhängig ist, folgt S ist Basis von $V = \mathbb{R}^3$.

Endlich erzeugte Vektorräume haben nach Theorem 5.8 eine Basis. Ein Vektorraum V kann aber viele verschiedene Basen haben. Wie vergleichen sich zwei verschiedene Basen von V? Um diese Frage zu beantworten, benötigen wir das folgende wichtige Hilfsmittel:

Lemma 5.10 (Austauschlemma)**.** *Sei V ein K-Vektorraum und sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Teilmenge von V. Sei $0 \neq w = \sum \lambda_i v_i \in V$. Angenommen $\lambda_k \neq 0$, für einen Index k, wobei $1 \leq k \leq n$. Definiere die Menge $T \coloneqq (S \cup \{w\}) \setminus \{v_k\} = \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$.*

a) Es ist $\operatorname{Span}(S) = \operatorname{Span}(T)$.

b) Ist S eine Basis von V, dann ist auch T eine Basis von V.

Beweis. a) i) Da $0 \neq w = \sum \lambda_i v_i$ existiert ein Index k mit $\lambda_k \neq 0$. Dann ist

$$\lambda_k v_k = w - \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i,$$

beziehungsweise

$$v_k = \lambda_k^{-1} w - \sum_{i \neq k} \lambda_k^{-1} \lambda_i v_i \in \operatorname{Span}(T).$$

Es folgt $\{v_1, \dots, v_n\} = S \subseteq \operatorname{Span}(T)$ und somit $\operatorname{Span}(S) \subseteq \operatorname{Span}(T)$.

ii) Wir zeigen jetzt noch die Umkehrung: Es ist $w = \sum \lambda_i v_i \in \operatorname{Span}(S)$. Es folgt, dass $T \subseteq \operatorname{Span}(S)$ und damit $\operatorname{Span}(T) \subseteq \operatorname{Span}(S)$.

Damit ist $\operatorname{Span}(T) = \operatorname{Span}(S)$.

b) Sei S eine Basis von V. Wir zeigen, dass T linear unabhängig ist. Ohne Einschränkung sei $k = 1$, d.h. $\lambda_1 \neq 0$, $T = \{w, v_2, \dots, v_n\}$.

Sei nun $0 = \mu w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$, mit $\mu, \mu_i \in K$. Wir setzen für w die obige Summe ein

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \left(\sum_i \lambda_i v_i \right) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n \\ &= \mu\lambda_1 v_1 + (\mu\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \dots + (\mu\lambda_n + \mu_n) v_n. \end{aligned}$$

Und da S linear unabhängig ist folgt $\mu\lambda_1 = \mu\lambda_2 + \mu_2 = \dots = \mu\lambda_n + \mu_n = 0$. Da $\lambda_1 \neq 0$ folgt $\mu = 0$ und somit $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$. Damit ist auch T linear unabhängig und mit *a*) eine Basis von V.

□

Theorem 5.11 (Austauschsatz)**.** *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sei $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist*

i) $m \leq n$, und

ii) es gibt Indizes $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ so, dass

$$(\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}) \cup \{w_1, \dots, w_m\}$$

eine Basis von V ist.

Dieses Theorem wird Austauschsatz genannt und basiert auf Lemma 5.10. Es zeigt uns, wie wir einen Basiswechsel durchführen können, so dass von uns gewünschte linear unabhängige Vektoren in der Basis liegen.

Beweis. a) Durch Umsortieren können wir annehmen, dass $i_1 = 1$, $i_2 = 2, \dots,$ $i_m = m$ gilt. Wir zeigen, dass dann $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Induktion nach m:

i) Induktionsanfang: Sei $m = 0$: $\emptyset \subseteq V$ linear unabhängig. Also ist das Theorem in diesem Fall korrekt.

ii) Sei $m \geq 1$ und das Theorem sei wahr für $m - 1$ Vektoren. Da $\{w_1, \dots, w_m\}$ linear unabhängig ist, folgt, dass auch $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ linear unabhängig ist. Nach geeigneter Umnummerierung der Vektoren gilt nach Induktionsvorraussetzung $m - 1 \leq n$ und $\{w_1, \dots, w_{m-1}, v_m, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V.

iii) Angenommen $m - 1 = n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge $\{w_1, \dots, w_{m-1}, v_m, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Diese Annahme besagt also, dass $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ bereits eine Basis von V ist. Nach Satz 5.5 ist eine Basis maximal linear unabhängig. Aber die größere Menge $\{w_1, \dots, w_m\}$ ist linear unabhängig, womit $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ nicht maximal linear unabhängig sein kann, und somit auch keine Basis ist. Dies ist ein Widerspruch. Es ist folglich $m - 1 < n$, also $m \leq n$.

iv) Da nach *ii)* die Menge $\{w_1, \dots, w_{m-1}, v_m, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist und $w_m \in V$, gibt es Koeffizienten $\lambda_i \in K$ mit

$$\lambda_1 w_1 + \dots \lambda_{m-1} w_{m-1} + \lambda_m v_m + \dots + \lambda_n v_n = w_m.$$

Angenommen $\lambda_m = \dots = \lambda_n = 0$. Dann ist $w_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i w_i$, womit die Menge $\{w_1, \dots, w_m\}$ linear abhängig wäre, was nach Voraussetzung falsch ist. Also existiert ein k mit $m \leq k \leq n$, so dass $\lambda_k \neq 0$. Nach Umsortierung sei o.E. $k = m$. Mit Austauschlemma 5.10 folgt dann, dass

$$\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

eine Basis von V ist.

□

Korollar 5.12. *Sei V ein K-Vektorraum mit einer endlichen Basis. Dann gilt:*

a) Jede Basis von V ist endlich.

b) Je zwei Basen von V haben gleiche Kardinalität.

Beweis. a) Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Sei $W := \{w_i \mid i \in I\}$ eine weitere Basis. Angenommen $|I| = \infty$, dann gibt es nach Bemerkung 5.2 Indizes $i_1, \dots, i_{n+1} \in I$ mit $\{w_{i_1}, \dots, w_{i_{n+1}}\}$ linear unabhängig. Mit dem Austauschsatz 5.11 folgt $n + 1 < n$. Dies ist ein Widerspruch, also ist $|I| < \infty$.

b) Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_m\}$ Basen von V. Wende nun Theorem 5.11 zweimal an: Dann ist $n \leq m$ und $m \leq n$. Also ist $m = n$.

□

Definition 5.13. Sei V ein K-Vektorraum. Wir definieren die *Dimension* von V, $\dim_K(V)$ oder $\dim(V)$, durch

$$\dim_K(V) := \begin{cases} n & \text{falls } V \text{ eine Basis mit } n \text{ Elementen besitzt,} \\ \infty & \text{sonst (falls } V \text{ keine endliche Basis besitzt).} \end{cases}$$

V heißt *endlich dimensional*, falls $\dim(V) = n < \infty$. Anderenfalls heißt V *unendlich dimensional*.

Beispiel 5.14. 1) $\dim(0_V) = 0$.

2) $\dim_K(K^n) = n$.

3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

4) $\dim_K M_{m \times n}(K) = m \cdot n$.

5) Der Vektorraum $K[x]$ aller Polynome in einer Variablen x mit Koeffizienten in einem Körper K mit unendlich vielen Elementen hat die Basis $B := \{1, x, x^2, \dots\}$, das heisst $\dim_K K[x] = \infty$. Nach Definition von $K[x]$ in

Beispiel 3.7 ist B ein Erzeugendensystem von $K[x]$. Um die lineare Unabhängigkeit dieser Menge zu beweisen, benötigen wir den Fundamentalsatz der Algebra. Angenommen die Menge B ist linear abhängig. Dann existiert nach Definition eine endliche Teilmenge $\{x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_t}\} \subset B$, die linear abhängig ist. Es existieren also Skalare $\lambda_i \in K$ derart, dass die Nullfunktion geschrieben werden kann als $0 = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x^{m_i}$, und nicht alle λ_i sind Null. Die Nullfunktion hat unendlich viele verschiedene Nullstellen in K. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das Polynom $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x^{m_i}$ nur endlich viele verschiedene Nullstellen. Dies ist ein Widerspruch. Also ist B linear unabhängig. Der Fundamentalsatz der Algebra wird häufig as Anwendung in der Komplexen Analysis bewiesen, gelegentlich auch – aber weniger schön – in der Algebravorlesung.

6) a) Sei $W \leq \mathbb{R}^2$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Es gibt drei mögliche Klassen von solchen Unterräumen:

   i) $W = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \dim W = 2$.
   ii) W ist eine Gerade durch den Ursprung $\Leftrightarrow \dim W = 1$.
   iii) Oder $W = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim W = 0$.

   b) Sei $W \leq \mathbb{R}^3$ ein Unterraum, dann gibt es vier mögliche Klassen von Unterräumen:

   i) $W = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim W = 3$.
   ii) W ist eine Ebene durch den Ursprung $\Leftrightarrow \dim W = 2$.
   iii) W ist eine Gerade durch den Ursprung $\Leftrightarrow \dim W = 1$.
   iv) Oder $W = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim W = 0$.

Korollar 5.15. *Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $\dim V = n$.*

a) Jede Teilmenge von V mit $n+1$ oder mehr Vektoren ist linear abhängig.

b) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V.

Beweis. a) Diese Aussage ist die Kontraposition des Austauschsatzes 5.11. Letztere Satz besagt:

$$J \subseteq V \text{ ist linear unabhängig} \Rightarrow |J| \leq n.$$

Die Kontraposition dieser Aussage ist:

$$|J| \geq n+1 \Rightarrow \text{J ist linear abhängig.}$$

b) Nach a) ist $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ maximal linear unabhängig. Mit Theorem 5.4 folgt die Behauptung.

□

Korollar 5.16 (Basisergänzungssatz)**.** *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Jede linear unabhängige Menge $S \subseteq V$ lässt sich zu einer Basis von V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $B \subseteq V$ von V mit $S \subseteq B$.*

Bemerkung: Dies gilt auch für unendlich erzeugte Vektorräume, wobei das Lemma von Zorn benötigt wird, welches äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Dies wird typischerweise erst in fortgeschrittenen Vorlesungen behandelt.

Beweis. Sei V endlich erzeugt. Dann hat V nach Theorem 5.8 eine endliche Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Sei $S = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Nach Voraussetzung ist S linear unabhängig. Nach Austauschsatz 5.11 ist $m \leq n$ und (nach Umsortieren) ist die Menge $B := \{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V mit $S \subseteq B$. $\square$

Korollar 5.17. *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und sei $W \leq V$ ein Unterraum. Es gilt*

a) *W ist auch endlich erzeugt,*

b) $\dim W \leq \dim V$,

c) $\dim W = \dim V$ *genau dann, wenn* $W = V$.

Bemerkung: Die letzte Aussage über die Gleichheit gilt *nicht* für unendlich erzeugte Vektorräume. Betrachte dazu $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$ und $W := \{f \in V : f \text{ Polynom}\}$. Dann gilt $\dim W = \dim V = \infty$, aber $W \subsetneqq V$.

Beweis. i) Sei V endlich erzeugt, d.h. nach dem Auswahlsatz 5.8 gilt $\dim V = n < \infty$. Sei $W \leq V$ ein Unterraum und sei $S \subseteq W$ linear unabhängig. Dann ist $S \subseteq V$ linear unabhängig, siehe Bemerkung 5.2. Mit dem Austauschsatz 5.11 folgt $|S| \leq \dim V = n$.

ii) Wähle $B \subseteq W$ maximal linear unabhängig. Dann ist B nach Definition 5.5 und Theorem 5.4 eine Basis von W. Nach i) gilt $|B| \leq n = \dim V$. Also ist W endlich erzeugt und $\dim W = |B| \leq \dim V$.

iii) Ist $\dim W = \dim V$, so gilt $|B| = n$, dass heißt B ist eine Basis von V und von W. Ist $V = W$, dann gilt trivialerweise $\dim W = \dim V$.

$\square$

Lemma 5.18. *Es is V ein nicht endlich erzeugter K-Vektorraum* $\Leftrightarrow \forall n \geq 1$ *existiert eine linear unabhängige Teilmenge* $S_n = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ : Wir machen einen Beweis durch Induktion nach n.

i) Sei $n = 1$. Da V nicht endlich erzeugt ist, kann V nicht der Nullvektorraum sein. V enthält also immer einen Vektor v, der nicht der Nullvektor ist. Somit ist $\{v\}$ linear unabhängig.

ii) Sei $n \geq 1$ und sei die Behauptung wahr für $n - 1$, das heisst es existiert eine Teilmenge $S_{n-1} := \{v_1, \ldots, v_{n-1}\} \subseteq V$, die linear unabhängig ist.

iii) Da V nicht endlich erzeugt ist, folgt $\text{Span}(S_{n-1}) \neq V$. Wähle nun einen Vektor $v \in V \setminus \text{Span}(S_{n-1})$. Dann gilt nach Lemma 5.3, dass $S_n := S_{n-1} \cup \{v\}$ linear unabhängig in V ist.

„$\Leftarrow$“ : Angenommen V ist endlich erzeugt. Dann gibt es Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $V = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Es folgt, dass Vektorraum V eine endliche Basis mit $\dim V \leq n$ Elementen besitzt. Nach Korollar 5.15 ist dann jede beliebige Menge mit $n+1$ oder mehr Vektoren linear abhängig, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also ist V nicht endlich erzeugt.

□

Beispiel 5.19. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Nach Beispiel 3.6 ist $V = \operatorname{Abb}(X, K)$ ein K-Vektorraum. Für $y \in X$ definiere $f_y : X \to K$ durch

$$f_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien $y_1, \ldots, y_n \in X$, paarweise verschieden. Dann ist $\{f_{y_1}, \ldots, f_{y_n}\} \subseteq V$ linear unabhängig. Ist $|X| = \infty$, so folgt nach Lemma 5.18, dass V nicht endlich erzeugt ist.

Beweis. Sei $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{y_i} = 0$ für Skalare $\lambda_i \in K$. Dann ist

$$0 = \left(\sum \lambda_i f_{y_i}\right)(x) = \sum \lambda_i f_{y_i}(x), \forall x \in X.$$

Wähle $x = y_i$, $1 \leq i \leq n$. Damit folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Also ist $\{f_{y_1}, \ldots, f_{y_n}\}$ linear unabhängig. □

Beispiel 5.20. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Dieser ist nicht endlich erzeugt. Angenommen er wäre endlich erzeugt. Dann existiert eine endliche $\mathbb{Q}$-Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\mathbb{R}$. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}$ lässt sich damit eindeutig als Linearkombination in der Basis B schreiben. Dann hat $\mathbb{R} = V =| \mathbb{Q} |^n$ viele Elemente. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, folgt $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dies ist ein Widerspruch zu $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Kapitel 6

Anwendungen zu Basen von Vektorräumen

Sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. In diesem Kapitel vertiefen wir die gelernten Konzepte von Basen und Dimension von Vektorräumen. Hierzu konstruieren wir explizit Basen von Vektorräumen durch Basisergänzung, wie im letzten Kapitel beschrieben, und wir charakterisieren sogenannte direkte Summen von Vektorräumen.

Definition 6.1. Sei $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ eine $m \times n$-Matrix. Definiere die *zu A transponierte Matrix* $A^T = (b_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$, wobei $b_{ij} := a_{ji}$, für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 6.2. *Seien $A, B \in M_{m\times n}(K)$ und $C \in M_{n\times p}(K)$, $\lambda \in K$. Dann gilt:*

i) $(A^T)^T = A$;

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

iv) $(BC)^T = C^T B^T$.

Beweis. Die Beweise der ersten drei Aussagen sind sind klar. Wir beweisen nur die letzte Aussage: Schreibe $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$. Dann ist der

$$\begin{aligned} (ij)\text{te Eintrag von } (BC)^T =& (ji)\text{te Eintrag von } BC \\ =& \sum_{t=1}^{n} b_{jt}c_{ti} = \sum_{t=1}^{n} c_{ti}b_{jt} \\ =& \sum_{t=1}^{n} (C^T)_{it} \cdot (B^T)_{tj} \\ =& (ij)\text{te Eintrag von } C^T B^T. \end{aligned}$$

□

Definition 6.3. Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Seien $a_1, \ldots, a_m$ die m Zeilenvektoren von A, also

$$a_i := (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})^T = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \in K^n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Seien $a^1, \ldots, a^n$ die n Spalten von A, also

$$a^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Definiere

$$\begin{aligned} \mathrm{ZR}(A) &:= \mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_m\} \leq K^n, \text{ den } \textit{Zeilenraum von } A, \\ \mathrm{SR}(A) &:= \mathrm{Span}\{a^1, \ldots, a^n\} \leq K^m, \text{ den } \textit{Spaltenraum von } A. \end{aligned}$$

Wir nennen $\dim \mathrm{ZR}(A)$ den *Zeilenrang* und $\dim \mathrm{SR}(A)$ den *Spaltenrang* von A.

Lemma 6.4. *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$.*

a) Sei $P \in M_m(K)$. Dann ist $\mathrm{ZR}(PA) \subseteq \mathrm{ZR}(A)$.
Ist P invertierbar, so gilt $\mathrm{ZR}(PA) = \mathrm{ZR}(A)$.

b) Sei $Q \in M_n(K)$. Dann ist $\mathrm{SR}(AQ) \subseteq \mathrm{SR}(A)$.
Ist Q invertierbar, so gilt $\mathrm{SR}(AQ) = \mathrm{SR}(A)$.

Beweis. a) i) Sei $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ und $P = (p_{ij}) \in M_m(K)$. Seien $a_1, \ldots, a_m$ die Zeilen von A. Die (transponierte) i-te Zeile von PA ist

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

mit $y_j = \sum_{t=1}^m p_{it} a_{tj}$, $1 \leq j \leq n$. Damit ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{i1}a_{11} + p_{i2}a_{21} + \cdots + p_{im}a_{m1} \\ p_{i2}a_{12} + p_{i2}a_{22} + \cdots + p_{im}a_{m2} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= p_{i1}a_1 + p_{i2}a_2 + \ldots p_{im}a_m \in \mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_m\} = \mathrm{ZR}(A) \ . \end{aligned}$$

Damit liegen alle Zeilen von PA in $\mathrm{ZR}(A)$, d. h. Span(Zeilen von PA) $\subseteq$ $\mathrm{ZR}(A)$ und somit folgt $\mathrm{ZR}(PA) \subseteq \mathrm{ZR}(A)$.

ii) Sei P nun invertierbar. Dann existiert $P^{-1} \in M_m(K)$ und es ist $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(P^{-1}(PA)) \overset{\text{i)}}{\subseteq} \mathrm{ZR}(PA)$. Mit i) folgt $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(PA)$.

b) Analog zu a).

$\square$

Korollar 6.5. *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$.*

a) $\mathrm{ZR}(A)$ *ändert sich nicht, wenn man elementare Zeilenumformungen auf A anwendet.*

b) $\mathrm{SR}(A)$ *ändert sich nicht, wenn man elementare Spaltenumformungen auf A anwendet.*

Beweis. a) Nach Lemma 2.6 sind elementare Zeilenumformungen durch Multiplikation mit einer invertierbaren Elementarmatrix gegeben. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 6.4.

b) Analog zu a).

$\square$

Bemerkung 6.6. Wir geben ein Verfahren an zur Berechnung einer Basis eines Unterraumes des K^n:

a) Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq K^n$ und $V = \mathrm{Span}(S)$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$$

eine Matrix mit den Eintrag v_i^T in der i-ten Zeile. Sei E die Zeilen-reduzierte Stufenform von A. Nach Korollar 6.5 gilt $\mathrm{ZR}(E) = \mathrm{ZR}(A) = \mathrm{Span}(S) = V$. Die Zeilen von E, die nicht Null sind, bilden eine Basis von V.

b) Wir demonstrieren das Verfahren an einem Beispiel. Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Sei $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^4$. Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

mit $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = V$. Wir wenden einige Zeilenumformungen ($R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - 3R_1$, $R_3 \to R_3 - 2R_2$) an und bekommen die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist noch nicht in Zeilen-reduzierter Stufenform, aber in Stufenform. Die Stufenform impliziert bereits, dass die Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Also ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von V.

Beispiel 6.7. Gegeben seien Unterräume

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\} \leq \mathbb{R}^4, \\ Y &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 2x_4 \right\} \leq \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es Basen $B_{X\cap Y}$, B_X, B_Y und B_{X+Y} der Vektorräume $X \cap Y$, X, Y und $X + Y$ zu bestimmen, derart, dass gilt: $B_{X\cap Y} \subseteq B_X$ und $B_{X\cap Y} \subseteq B_Y$, sowie B_X beziehungsweise B_Y ist enthalten in B_{X+Y}.

a) Wir beginnen mit der Bestimmung einer Basis von $X \cap Y$. Hierzu bestimmen wir die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die hierzu gehörige erweiterte Matrix wird auf Zeilen-reduzierte Stufenform gebracht. Diese ist:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Sei nun $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $x_1 = 3\alpha$, $x_2 = -3\alpha$ und $x_4 = 2\alpha$.

Somit ist

$$X \cap Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dementsprechend hat $X \cap Y$ die Basis $B_{X\cap Y} = \{w := (3, -3, 2, 1)^T\}$ und somit ist $\dim X \cap Y = 1$.

b) Wir erweitern nun die gefundene Basis $B_{X\cap Y}$ zu einer Basis B_X von X. Es ist

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine Basis von X ist $\{(1,0,0,0)^T, (0,1,0,-1)^T, (0,0,1,-1)^T\}$. Mit Hilfe des Austauschlemmas 5.10 können wir nun w in die Basis einbringen. Es ist $w = 3 \cdot v_1 + (-3)v_2 + 2v_3$. Damit können wir als Basis von X die Menge $B_X = \{w, v_1, v_2\} \supseteq B_{X\cap Y} = \{w\}$ wählen.

c) Genauso finden wir eine Basis B_Y mit $B_{X\cap Y} = \{w\} \subseteq B_Y$. Zunächst ist die Menge $\{u_1 = (-1,1,0,0)^T, u_2 = (0,0,2,1)^T\}$ eine Basis von Y, und es gilt $w = (-3)u_1 + u_2$. Wir setzen $B_Y = \{w, u_1\}$. Dann ist B_Y eine Basis von Y mit $B_{X\cap Y} \subseteq B_Y$.

d) Unsere Behauptung ist nun, dass $\mathcal{C} = \{w, u_1, v_1, v_2\}$ eine Basis von $X+Y$ ist. Insbesondere ist dann $\dim X+Y = 4$. Da $X+Y \leq \mathbb{R}^4$ ist, gilt nach 5.17, dass $X+Y = \mathbb{R}^4$.

Beweis. i) Da $\{w, v_1, v_2\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren ist und $u_1 \notin \operatorname{Span}\{w, v_1, v_2\} = X$ (da sonst $u_1 \in X \cap Y$ wäre), folgt, dass $\mathcal{C}$ linear unabhängig ist.

ii) Da $\mathcal{C} \subseteq X+Y$ ist auch $\operatorname{Span}\mathcal{C} \subseteq X+Y \subseteq \mathbb{R}^4$. Da $\dim\mathcal{C} = 4 = \dim\mathbb{R}^4$ folgt, dass $\dim X+Y = 4$, d.h. $X+Y = \mathbb{R}^4$. Somit ist $\mathcal{C}$ eine Basis von $X+Y$.

□

Bemerkung: Der Beweis des folgenden Satzes zeigt, dass die Argumente in d) allgemein gelten.

Theorem 6.8. *Seien $X, Y \leq V$ Unterräume eines K-Vektorraumes V, dann gilt*

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X\cap Y).$$

Beweis. a) Sei $B_{X\cap Y} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $X\cap Y$. Da $X \cap Y \leq X$ ein Unterraum ist folgt mit Korollar 5.16, dass es eine Basis B_X von X gibt, mit $B_{X\cap Y} \subseteq B_X$. Sei

$$B_X = \{v_1, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_s\}.$$

Da $X\cap Y \leq Y$ ein Unterraum ist folgt wieder mit Korollar 5.16, dass es eine Basis B_Y von Y gibt, mit $B_{X\cap Y} \subseteq B_Y$. Analog sei

$$B_Y = \{v_1, \ldots, v_n, y_1, \ldots, y_t\}.$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{C} \coloneqq \{v_1, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ eine Basis von $X+Y$ ist.

Angenommen dies ist wahr, dann folgt

$$\begin{aligned} \dim X\cap Y &= n \\ \dim X &= n+s \\ \dim Y &= n+t \\ \dim X+Y &= n+s+t, \end{aligned}$$

also gilt

$$\begin{aligned} \dim X+Y &= n+s+t = (n+s)+(n+t)-n \\ &= \dim X + \dim Y - \dim(X\cap Y). \end{aligned}$$

b) Wir zeigen die Behauptung: $\mathcal{C}$ ist eine Bais von $X+Y$.

   i) Sei $v \in X+Y$, dann gibt es ein $x \in X$ und ein $y \in Y$ mit $v = x+y$. Da $x \in X$, gibt es $\alpha_i \in K$ und $\beta_i \in K$ mit

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_s x_s.$$

   Da $y \in Y$ gibt es $\gamma_i, \delta_i \in K$ mit

$$y = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n + \delta_1 y_1 + \cdots + \delta_t y_t.$$

   Somit ist

$$v = \sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i x_i + \sum \gamma_i v_i + \sum \delta_i y_i \in \mathrm{Span}(\mathcal{C}).$$

   ii) Sei $0 = \sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i x_i + \sum \gamma_i y_i$ für Skalare $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in K$. Wir definieren $z = \sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i x_i = -\sum \gamma_i y_i \in X \cap Y$. Da $z \in X \cap Y$, gibt es Skalare $\lambda_i \in K$ mit $z = \sum \lambda_i v_i$. Und somit folgt $\sum \lambda_i v_i = \sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i x_i$. Also

$$0 = \sum \alpha_i v_i + \sum (-\lambda_i) v_i + \sum \beta_i x_i = \sum (\alpha_i - \lambda_i) v_i + \sum \beta_i x_i.$$

   Da $\{v_1, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_s\}$ linear unabhängig ist, folgt $\alpha_i = \lambda_i$ für alle i, sowie $\beta_i = 0$ für alle i. Also folgt

$$z = \sum \alpha_i v_i + \sum \underbrace{\beta_i}_{0} x_i = \sum \alpha_i v_i = -\sum \gamma_i y_i,$$

   also ist $0 = \sum \alpha_i v_i + \sum \gamma_i y_i$. Da $\{v_1, \ldots, v_n, y_1, \ldots, y_t\}$ linear unabhängig ist, folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i, 1 \leq i \leq n$ und $\gamma_i = 0$ für alle $i, 1 \leq i \leq t$. Also ist $\mathcal{C}$ linear unabhängig.

$\square$

Definition 6.9. Sei V ein K-Vektorraum, seien $X, Y \leq V$ Unterräume mit

i) $V = X + Y$ und

ii) $X \cap Y = \{0_V\}$.

Dann heißt $V = X + Y$ die (innere) *direkte Summe von* X *und* Y. Wir schreiben $V = X \oplus Y$.

Theorem 6.10. *Seien $X, Y \leq V$ Unterräume. Es sind äquivalent*

1) $V = X \oplus Y$.

2) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als $v = x + y$, mit $x \in X$ und $y \in Y$.

3) $X \cap Y = \{0_V\}$ und $\dim V = \dim X + \dim Y$.

4) $X + Y = V$ und $\dim V = \dim X + \dim Y$.

Beweis. Wir verwenden wieder einen Ringschluss (1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1)), um Theorem 6.10 zu beweisen.

1) $\Rightarrow$ 2): Sei $V = X \oplus Y$. Dann gilt nach Definition 6.9, dass $V = X + Y$, d.h. zu $v \in V$ gibt es ein $x \in X$ und $y \in Y$ mit $v = x + y$.

Wir nehmen nun an diese Zerlegung sei nicht eindeutig, also sei $v = x_1 + y_1$ und $v = x_2 + y_2$, mit $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$. Wir bilden die Differenz beider Darstellungen von v und erhalten

$$\underbrace{x_1 - x_2}_{\in X} = \underbrace{y_2 - y_1}_{\in Y} \in X \cap Y = \{0_V\}.$$

Es folgt $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ und so die Eindeutigkeit der Darstellung.

2) $\Rightarrow$ 3): Da $X, Y \leq V$, gilt auch $X + Y \leq V$. Nach Voraussetzung gibt es für alle $v \in V$ ein $x \in X$ und $y \in Y$ mit $v = x + y \in X + Y$, d.h. $V \leq X + Y$. Also gilt $X + Y = V$.

Angenommen $v \in X \cap Y$. Es gilt

$$\begin{aligned} v &= 0 + v \\ v &= v + 0. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Darstellung von $v \in V$ als Summe eines Elementes in X und eines Elementes in Y eindeutig, weshalb $v = 0$ folgt. Damit ist $X \cap Y = \{0\}$ und mit Theorem 6.8 folgt:

$$\dim V = \dim(X + Y) = \dim X + \dim Y.$$

3) $\Rightarrow$ 4): Da $X, Y \leq V$, gilt $X + Y \leq V$. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim(X + Y) &\overset{6.8}{=} \dim X + \dim Y - \underbrace{\dim(X \cap Y)}_{\text{0, nach Vor.}} \\ &= \dim X + \dim Y \\ &\overset{3)}{=} \dim V. \end{aligned}$$

Mit Korollar 5.17 folgt $X + Y = V$.

4) $\Rightarrow$ 1): Nach Voraussetzung gilt $V = X + Y$. Damit folgt

$$\dim X + \dim Y \overset{4)}{=} \dim V \overset{6.8}{=} \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Vergleich der linken und rechten Seite liefert $\dim(X \cap Y) = 0$. Dies ist nur möglich für $X \cap Y = \{0\}$, und es folgt mit Definition 6.9, dass $V = X \oplus Y$ ist.

$\square$

Beispiel 6.11. a) Sei $V = M_n(K)$ der Vektorraum der quadratischen $n \times n$-Matrizen. Seien weiterhin

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_n(K) &\coloneqq \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\} \\ \mathrm{Alt}_n(K) &\coloneqq \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\} \end{aligned}$$

die Menge aller *symmetrischer* beziehungsweise *antisymmetrischer* Matrizen. Man zeigt leicht, dass $\mathrm{Sym}_n(K), \mathrm{Alt}_n(K)$ Unterräume von $M_n(K)$ sind.

b) Es ist $\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid i < j\}$ eine Basis von $\mathrm{Sym}_n(K)$. Sei nun $1_K + 1_K \neq 0_K$ – wie das zum Beispiel in $\mathbb{Z}_2$ der Fall ist. Dann ist die Menge der antisymmetrischen Matrizen $\{E_{ij} - E_{ji} \mid i < j\}$ eine Basis von $\mathrm{Alt}_n(K)$. Es folgt hieraus für die Vektorraumdimensionen, dass $\dim \mathrm{Sym}_n(K) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\dim \mathrm{Alt}_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$ ist. Der Beweis ist Übungsaufgabe.

c) Sei $1_K + 1_K \neq 0_K$ in K. Wir behaupten $M_n(K) = \mathrm{Sym}_n(K) \oplus \mathrm{Alt}_n(K)$.

Beweis. i) Sei $A \in \mathrm{Sym}_n(K) \cap \mathrm{Alt}_n(K)$, dann ist $A \in \mathrm{Sym}_n(K)$ und $A \in \mathrm{Alt}_n(K)$. Damit ist nach Definition $A = A^T$ und $-A = A^T$. Daraus folgt $A = -A$. Wir addieren von links mit A und erhalten $2A = A + A = A + (-A) = 0$. Für $1_K + 1_K \neq 0_K$ gilt dies nur für $A = 0$.

ii) Benutze Theorem 6.10. Da

$$\dim \mathrm{Sym}_n(K) + \dim \mathrm{Alt}_n(K) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim M_n(K),$$

folgt $M_n(K) = \mathrm{Alt}_n(K) \oplus \mathrm{Sym}_n(K)$. □

Kapitel 7

Lineare Abbildungen

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. In diesem Kapitel studieren wir strukturerhaltende Abbildungen zwischen Vektorräumen, die sogenannten linearen Abbildungen.

Zunächst erinnern wir an die folgenden Begriffe aus dem Grundlagenkapitel: Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heisst die Abbildung

- *injektiv*, falls für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.
- *surjektiv* falls für alle $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$.
- *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Abbildung f ist genau dann bijektiv, wenn f invertierbar ist, das heisst es existiert eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Wir schreiben $g \coloneqq f^{-1}$, und nennen f^{-1} die *Inverse Abbildung zu f*. Mit den definierten Begriffen gilt:

- Sind f und g injektiv beziehungsweise surjektiv, dann ist $g \circ f$ auch injektiv beziehungsweise surjektiv.
- Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist f injektiv. Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist g surjektiv.
- Ist f bijektiv, dann ist f^{-1} bijektiv.

Beweis. Beispielsweise haben wir:

i) Seien f und g injektiv. Sei $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ für $x, y \in A$, dann $g(f(x)) = g(f(y))$. Da g injektiv ist, folgt $f(x) = g(x)$. Und da f injektiv ist, gilt $x = y$. Also ist $g \circ f$ injektiv.

ii) Seien f und g surjektiv. Sei $c \in C$. Da g surjektiv ist, existiert ein Element $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da f surjektiv ist, existiert ein Element $a \in A$ mit $f(a) = b$. Also gilt $c = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$. Also ist $g \circ f$ surjektiv.

□

Sei $C \subseteq B$. Für eine nicht notwendigerweise bijektive Abbilung $f : A \to B$ nennen wir $f^{-1}(C) \coloneqq \{a \in A \mid f(a) \in C\}$ das *Urbild* von C unter f.

Definition 7.1. Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt *linear* (K*-linear*, *Homomorphismus* oder *Vektorraumhomomorphismus*), falls gilt:

(L1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$,

(L2) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$.

Bemerkung 7.2. a) Axiome (L1) und (L2) sind äquivalent zur Aussage:
(L) $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$.

b) Wir schreiben oft Tv statt $T(v)$.

c) Beachte $\lambda \cdot v$ ist eine Skalarmultiplikation in V, während $\lambda \cdot T(v)$ eine Skalarmultiplikation in W ist. Genauso ist $v_1 + v_2$ Addition in V und $Tv_1 + Tv_2$ Addition in W.

Beispiel 7.3. i) Sei V ein Vektorraum. Die Abbildung $0 : V \to \{0_V\}$, $v \mapsto 0_V$, auch *Nullabbildung* genannt, ist linear. Die Abbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$, $v \mapsto v$ ist linear. Sie heisst *Identitätsabbildung*. Die Abbildung $T : V \to V$, $v \mapsto v_0$ für ein festes $v_0 \in V$ mit $v_0 \neq 0$ ist *nicht* linear, denn $v_0 = T(v+v) = T(v) + T(v) = 2v_0$, Widerspruch.

ii) Sei $T : V \to W$ Abbildung zwischen zwei Mengen V und W, sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Wir definieren die *Einschränkung von T auf U* als die Abbildung

$$T\Big|_U : U \to W,\ u \mapsto T(u).$$

Ist T lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W und ist $U \leq V$ ein Unterraum, so ist auch die Einschränkung $T\Big|_U$ linear.

iii) Sei $1 \leq i \leq n$ fest gewählt. Die Abbildung $\pi_i : K^n \to K^n$, definiert durch

$$(x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto (0, \ldots, x_i, \ldots, 0)^T = x_i e_i,$$

ist eine lineare Abbildung. Sie wird *Projektion auf die i-te Komponente* genannt.

Beweis. Es gilt für $x_j, y_j \in K$ mit $1 \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned}
\pi_i\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) &= \pi_i \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = (x_i + y_i)e_i = x_i e_i + y_i e_i \\
&= \pi_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \pi_i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit gilt (L1) für π_i. Genauso überprüfen wir Axiom (L2):

$$\pi_i\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \pi_i \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = (\lambda x_i)e_i = \lambda(x_i e_i) = \lambda \pi_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

iv) Sei K ein Körper und $K_n[X] = \{a_0 + a_1x + \dots a_nx^n \mid a_i \in K\}$ und $X = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall in den reellen Zahlen.

   i) *Differentiation:* Betrachte den Unterraum

   $$V \coloneqq \{f : X \to \mathbb{R} \mid\ f \text{ differenzierbar}\} \leq \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}).$$

   Dann ist $D_1 : V \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ nach Analysis linear, denn

   $$(f+g)' = f' + g',$$
   $$(\lambda f)' = \lambda(f'),$$

   für alle $f, g \in V$ und $\lambda \in K$. Definiere in Analogie zur Analysis für beliebige Körper K die Abbildung:

   $$D_2 : K_n[X] \to K_{n-1}[X], \quad f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto f' = \sum_{i=1}^{n} a_i i x^{i-1}.$$

   Es ist eine leichte Übungsaufgabe zu zeigen, dass D_2 linear ist.

   ii) *Integration:* Betrachte den Unterraum

   $$V \coloneqq \{f : X \to \mathbb{R} \mid\ f \text{ stetig}\} \leq \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}).$$

   Nach Analysis ist dann

   $$I_1 : V \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

   linear. Definiere in Analogie zur Analysis für beliebigen Körper K die Abbildung

   $$I_2 : K_{n-1}[X] \to K_n[X], \quad f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}.$$

   Es ist eine leichte Übungsaufgabe zu zeigen, dass I_2 linear ist.

v) Sei $A \in M_{m\times n}(K)$, und sei $T_A : K^n \to K^m$ definiert durch Multiplikation mit A, also durch $x \mapsto A \cdot x$. Dann ist T_A linear. Dies ist der Prototyp einer linearen Abbildung; wir werden sehen, dass jede lineare Abbildung letztendlich, in einem gewissen Sinne, von dieser Art ist.

Beweis. Seien $x_1, x_2, x \in K^n$ und sei $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$T_A(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = T(x_1) + T(x_2),$$

und

$$T_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda T(x),$$

Also ist T linear. □

Lemma 7.4. *Seien U, V, W drei K-Vektorräume.*

a) Seien $S, T : V \to W$ linear, sei $\lambda \in K$. Definiere $S + T : V \to W$ durch $(S+T)(v) := S(v) + T(v)$ und $\lambda S : V \to W$ durch $(\lambda S)(v) := \lambda \cdot S(v)$. Dann sind $S + T$ und λS linear.

b) Seien $T : V \to W$ und $S : W \to U$ linear. Definiere $S \circ T : V \to U$ durch $(S \circ T)(v) := S(Tv)$. Dann ist $S \circ T$ linear.

c) Sei $T : V \to W$ linear. Ist T invertierbar, dann ist T^{-1} linear.

Beweis. a) i) Sei $v \in V$. Da $S(v) \in W$ und $T(v) \in W$ und W ein Vektorraum ist, gilt $S(v) + T(v) \in W$ und $\lambda \cdot S(v) \in W$. Also sind $S + T : V \to W$ und $\lambda S : V \to W$ wohldefinierte Abbildungen.

ii) Seien $\alpha, \beta \in K$ und $u, v \in V$. Da S linear, gilt $S(\alpha u + \beta v) = \alpha S(u) + \beta S(v)$. Da T linear ist, gilt $S(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$. Also folgt

$$\begin{aligned}(S+T)(\alpha u + \beta v) &= S(\alpha u + \beta v) + T(\alpha u + \beta v)\\ &= \alpha S(u) + \beta S(v) + \alpha T(u) + \beta T(v)\\ &= \alpha(S(u) + T(u)) + \beta(S(v) + T(v))\\ &= \alpha(S+T)(u) + \beta(S+T)(v).\end{aligned}$$

Also ist $S + T$ linear. Analog zeigt man, dass λS linear ist.

b) Übungsaufgabe.

i) Sei $v \in V$, dann ist $T(v) \in W$. Also ist $S(T(v)) \in U$. Es folgt, dass $S \circ T : V \to U$ wohldefinierte Abbildung ist.

ii) Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und $v_1, v_2 \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &\overset{\text{Def} \circ}{=} S(T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2))\\ &\overset{T \text{ linear}}{=} S(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2))\\ &\overset{S \text{ linear}}{=} \alpha_1 S(T(v_1)) + \alpha_2 S(T(v_2))\\ &\overset{\text{Def} \circ}{=} \alpha_1 (S \circ T)(v_1) + \alpha_2 (S \circ T)(v_2).\end{aligned}$$

Somit folgt $S \circ T$ ist linear.

c) Seien $w_1, w_2 \in W$. Da T bijektiv, existiert $v_i \in V$ mit $Tv_i = w_i$, beziehungsweise mit $T^{-1}(w_i) = v_i$, für $i = 1, 2$. Dann ist

$$\begin{aligned}T^{-1}(w_1 + w_2) &= T^{-1}(T(v_1) + T(v_2))\\ &\overset{T \text{ linear}}{=} T^{-1}(T(v_1 + v_2))\\ &\overset{\text{Def} \circ}{=} (T^{-1} \circ T)(v_1 + v_2)\\ &= \mathrm{id}_V(v_1 + v_2) = v_1 + v_2\\ &= T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2).\end{aligned}$$

Analog gilt für alle $\alpha \in K, w \in W$: $T^{-1}(\alpha w) = \alpha T^{-1}(w)$. Also ist T^{-1} linear. $\square$

Definition 7.5. Sei $T : V \to W$ linear. Dann heißt

- T *Monomorphismus*, falls T injektiv,
- T *Epimorphismus*, falls T surjektiv,
- T *Isomorphismus*, falls T bijektiv ist.

Zwei Mengen V und W heißen *isomorph*, wenn ein Isomorphismus $f : V \to W$ zwischen ihnen existiert. Wir schreiben $V \simeq W$, gesprochen „V ist isomorph zu W“. Wir werden sehen, dass sich isomorphe Vektorräume völlig gleich verhalten.

Bemerkung 7.6. a) Lemma 7.4 sagt: Die Komposition von Monomorphismen ist ein Monomorphismus und die Komposition von Epimorphismen ist ein Epimorphismus; und das Inverse von einem Isomorphismus ist ein Isomorphismus.

b) Wir definieren die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K(V, W) &:= \{T : V \to W \mid T \text{ linear}\},\\ \mathrm{End}_K(V) &:= \mathrm{Hom}_K(V, V),\\ \mathrm{Aut}_K(V) &:= \mathrm{GL}(V) := \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid f \text{ bijektiv }\}.\end{aligned}$$

Ein Element in $\mathrm{End}_K(V)$ heißt *Endomorphismus*, ein Element in $\mathrm{Aut}_K(V)$ heißt *Automorphismus*. Es ist $(\mathrm{Hom}_K(V, W), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum mit $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$ und $(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$. Es ist $\mathrm{GL}(V)$ eine Gruppe bezüglich Komposition $\circ$ von Abbildungen. Es ist $(\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ ein Ring.

Beispiel 7.7. 1. Sei $L : M_{m\times n}(K) \to M_{n\times m}(K)$, definiert durch $A \mapsto A^T$.

a) Es gilt für alle $A, B \in M_{m\times n}(K)$ und alle $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned}L(A + B) &= (A + B)^T \overset{6.2}{=} A^T + B^T = L(A) + L(B),\\ L(\lambda A) &= (\lambda A)^T \overset{6.2}{=} \lambda A^T = \lambda L(A).\end{aligned}$$

Also ist L linear.

b) i) Sei $L(A) = L(B)$, dann ist $A^T = B^T$. Mit Lemma 6.2 erhalten wir $A = (A^T)^T = (B^T)^T = B$. Also ist L injektiv.

ii) Sei $B \in M_{m\times n}(K)$, dann ist $L(B^T) = (B^T)^T = B$. Also ist L surjektiv.

Damit ist L ein Isomorphismus, das heisst, es ist $M_{m\times n}(K) \simeq M_{n\times m}(K)$. Insbesondere ist $M_{1\times n}(K) \simeq K^n \simeq M_{n\times 1}(K)$.

2. Sei $(a_{ij}) = A \in M_n(K)$. Definiere $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, die *Spur* von A. Dann ist $\mathrm{Tr} : M_n(K) \to K$, mit $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$, ein Epimorphismus.

3. Seien $U_1, U_2 \leqslant V$ Unterräume.

a) Die Abbildung $\varphi : U_1 \times U_2 \to U_1 + U_2, (u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$ ist linear:

$$\begin{aligned}\varphi((u_1,u_2)+(v_1,v_2)) &= \varphi(u_1+v_1, u_2+v_2)\\ &= u_1+v_1+u_2+v_2\\ &= (u_1+u_2)+(v_1+v_2)\\ &= \varphi(u_1,u_2)+\varphi(v_1,v_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(u_1,u_2)) &= \varphi((\lambda u_1, \lambda u_2))\\ &= \lambda u_1 + \lambda u_2\\ &= \lambda(u_1+u_2)\\ &= \lambda \cdot \varphi(u_1,u_2),\end{aligned}$$

für alle $u_1, v_1 \in U_1$ und $u_2, v_2 \in U_2$ und $\lambda \in K$.

b) Sei nun weiterhin $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, also $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$, siehe 6.9. Die Abbildung φ ist in diesem Fall ein Isomorphismus: $U_1 \times U_2 \simeq U_1 \oplus U_2$. Die Details sind wie folgt:

   i) Sei $\varphi(u_1,u_2) = \varphi(v_1,v_2)$, also $u_1+u_2 = v_1+v_2$. Es folgt $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Also ist $u_1 = v_1$ und $u_2 = v_2$, und somit φ injektiv.

   ii) Sei $u \in U_1 \oplus U_2$. Es existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u_1 + u_2 = u$. Dann ist $\varphi(u_1,u_2) = u_1 + u_2 = u$, und somit φ surjektiv. Beachte, dass wir hierfür nicht die Voraussetzung $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ benutzt haben.

   Man bezeichnet $U_1 \times U_2$ auch als *äussere direkte Summe*. Der Epimorphismus $\pi : U_1 \oplus U_2 \to U_1, u_1 + u_2 \mapsto u_1$ heißt *Projektion auf U_1 entlang U_2*. Der Monomorphismus $\iota : U_1 \to U_1 \oplus U_2, u_1 \mapsto u_1 + 0$ heißt *Einbettung von U_1 in $U_1 \oplus U_2$*.

Lemma 7.8. *Sei $T : V \to W$ linear. Dann gilt für alle $\lambda_i \in K$ und $v, v_i \in V$:*

a) $T(0_V) = 0_W$,

b) $T(-v) = -T(v)$,

c) $T\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i T(v_i)$.

Beweis. a) Es ist $T(0_V) \overset{3.4}{=} T(0_K \cdot 0_V) \overset{(L2)}{=} 0_K \cdot T(0_V) \overset{3.4}{=} 0_W$. Alternativ ist $T(0_V) = T(0_V + 0_V) \overset{(L1)}{=} T(0_V) + T(0_V)$. Durch addieren von $-T(0_V)$ folgt die Behauptung.

b) Es ist $T(-v) \overset{3.4}{=} T((-1)\cdot v) \overset{(L2)}{=} (-1)T(v) \overset{3.4}{=} -T(v)$.

c) Folgt induktiv aus (L1) und (L2).

□

Definition 7.9. Sei $T : V \to W$ linear. Wir definieren

$$\mathrm{Ker}(T) := \{v \in V \mid Tv = 0_W\}, \text{ den } \textit{Kern} \text{ von } T,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(T) &:= \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } Tv = w\}, \text{ das } \textit{Bild} \text{ von } T.\\ &= \{Tv \mid v \in V\} =: T(V).\end{aligned}$$

Lemma 7.10. *Sei $T : V \to W$ linear. Dann gilt:*

a) Sei $U \leqslant V$ ein Unterraum. Dann ist $T(U) = \{Tu \mid u \in U\} \leqslant W$ Unterraum. Insbesondere ist $\mathrm{im}(T) = T(V) \leqslant W$ Unterraum.

b) Sei $U \leqslant W$ Unterraum. Dann ist $T^{-1}(U) \leqslant V$ ein Unterraum. Insbesondere ist $\mathrm{Ker}(T) = T^{-1}(\{0\}) \leqslant V$.

c) Abbildung T ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ ist.
Abbildung T ist surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{im}(T) = W$ ist.

Beweis. a) Sei $U \leqslant V$ Unterraum. Dann ist $0_U = 0_V \in U$. Nach Lemma 7.8 gilt $T(0_U) = 0_W$. Also ist $0_W \in T(U)$. Seien ferner $w_1, w_2 \in T(U)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $T(u_1) = w_1$ und $T(u_2) = w_2$. Also gilt $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) = T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$, da die Abbildung T linear ist. Da U ein Unterraum ist, gilt $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$ und somit $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in T(U)$. Also ist $T(U) \leqslant W$.

b) Sei $U \leqslant W$. Dann ist $0_W \in U$, mit Lemma 7.8 gilt also $T(0_V) = 0_W \in U$. Also ist $0_V \in T^{-1}(U)$. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und seien $v_1, v_2 \in T^{-1}(U)$, also $Tv_1, Tv_2 \in U$. Da $U \leqslant W$ Unterraum, gilt $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{T \text{ linear}}{=} \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \in U$. Also ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in T^{-1}(U)$. Es folgt somit $T^{-1}(U) \leqslant W$.

c) „$\Rightarrow$“: Sei $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Angenommen es ist $Tv_1 = Tv_2$, also $0 = Tv_1 - Tv_2 = T(v_1 - v_2)$. Dnn ist $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Es folgt $v_1 - v_2 = 0$, beziehungsweise $v_1 = v_2$. Also ist T injektiv.

„$\Leftarrow$“: Sei T injektiv. Sei $v \in \mathrm{Ker}(T)$, also $Tv = 0$. Nach Lemma 7.8 gilt auch $T(0) = 0$, das heisst $Tv = T(0)$. Da T injektiv ist, folgt $v = 0$. Also ist $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

□

Lemma 7.11. *Sei $T : V \to W$ linear.*

a) Sei $S \subseteq V$ mit $V = \mathrm{Span}(S)$. Dann gilt $\mathrm{im}(T) = \mathrm{Span}\{Tv \mid v \in S\}$. Insbesondere, ist T surjektiv, so wird ein Erzeugendensystem von V auf ein Erzeugendensystem von W abgebildet.

b) Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig in V. Dann ist $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ linear abhängig in W. Umgekehrt, eine injektive Abbildung bildet eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus V auf eine linear unabhängige Menge in W ab.

Bemerkung:

i) Als Kontraposition der ersten Aussage aus b) bekommen wir: Sei $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ linear unabhängig in W, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig in V.

ii) Die Umkehrung der zweiten Aussage in (b) ist im Allgemeinen für nicht injektive Abbildungen falsch. Sei T nicht injektiv. Dann existiert nach Lemma 7.10 ein Element $0 \neq v \in \operatorname{Ker}(T)$. Es ist $\{v\}$ linear unabhängig in V, aber $\{Tv = 0\}$ ist linear abhängig in W.

Beweis. a) Wir zeigen zwei Mengeninklusionen:

i) Sei $w \in \operatorname{im}(T)$, dann existiert $v \in V$ mit $Tv = w$. Da $V = \operatorname{Span}(S)$, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $v_i \in S$ und $\lambda_i \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Da T linear ist, gilt $w = Tv = T(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i T(v_i) \in \operatorname{Span}\{Tv \mid v \in S\} = \operatorname{Span}(T(S))$.

ii) Für alle $v \in S$ gilt $Tv \in \operatorname{im}(T) \subseteq W$. Da $\operatorname{im}(T) \leqslant W$ Unterraum ist, ist also $\operatorname{im}(T)$ abgeschloßen bezüglich Addition und Skalarmultiplikation. Also ist $\operatorname{Span}\{Tv \mid v \in S\} \subseteq \operatorname{im}(T)$.

b) i) Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig. Also existieren $\lambda_i \in K$, nicht alle Null, mit $0 = \sum \lambda_i v_i$. Also ist $0 = T(0) = T(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i T(v_i)$, wobei nicht alle λ_i Null sind. Es folgt, dass $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ linear abhängig ist.

ii) Sei T injektiv. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig. Angenommen für $\lambda_i \in K$ gilt $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) \overset{T \text{ linear}}{=} T(\sum \lambda_i v_i)$. Da $T(0) = 0 = T(\sum \lambda_i v_i)$ und T injektiv, folgt $0 = \sum \lambda_i v_i$. Da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_i = 0$ für alle i. Also ist $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ linear unabhängig.

□

Theorem 7.12 (Klassifikation der K-Vektorräume nach ihrer Dimension)**.** *Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V. Dann ist die Abbildung $\varphi : K^n \to V : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \mapsto \sum \lambda_i v_i$ ein Isomorphismus von Vektorräumen mit inverser Abbildung $\psi : V \to K^n : v \mapsto M_B(v)$, den Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B.*

Beweis. a) Für alle $x, y \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi\big((x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)^T\big) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)v_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i \\ &= \varphi(x) + \varphi(y).\end{aligned}$$

Analog ist $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$, für alle $\lambda \in K$ und $x \in K^n$. Folglich ist φ linear.

b) Es gilt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_V$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K^n}$. Somit ist φ invertierbar, also bijektiv.

□

Korollar 7.13. *Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Dann ist $V \simeq W$ genau dann, wenn $\dim V = \dim W$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Seien V und W isomorph. Dann gibt es ein Isomorphismus $T : V \to W$. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Da T injektiv ist folgt nach 7.11, dass die Vektoren $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ linear unabhängig sind. Da T surjektiv ist, folgt nach 7.11, dass die Vektoren $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ den Vektorraum W erzeugen. Somit ist $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ eine Basis von W und $\dim W = n = \dim V$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\dim V = \dim W =: n$, dann folgt mit Theorem 7.12 und Bemerkung 7.7, dass die Abbidlung $V \overset{\psi}{\to} K^n \overset{\varphi}{\to} W$ als Komposition zweier Isomorphismen ein Isomorphismus ist. Somit gilt mit Definition 7.5, dass $V \simeq W$.

□

Beispiel 7.14. a) Seien $U_1, U_2 \leqslant V$ mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Dann ist nach 7.7 $U_1 \oplus U_2 \simeq U_1 \times U_2$ und nach dem Korollar 7.13 ist $\dim(U_1 \times U_2) = \dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

b) Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von V und sei $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von W, dann ist $\{(v_i, 0) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{(0, w_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ eine Basis von $V \times W$.

Beispiel 7.15. Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z)^T \mapsto (x, 0)^T$, dann ist T linear mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Span}\{(0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\operatorname{im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ist $n(T) \coloneqq \dim \operatorname{Ker}(T) = 2$ und $r(T) \coloneqq \dim \operatorname{im}(T) = 1$. Als Beispiel für den nächsten Satz, halten wir die folgende Beobachtung fest: es ist

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = n(T) + r(T).$$

Theorem 7.16 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen/Rank-Defekt-Theorem)**.** *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist* $\dim V = r(T) + n(T)$, *wobei*

$r(T) \coloneqq \dim(\operatorname{im}(T))$, *genannt* Rank von T,

$n(T) \coloneqq \dim(\operatorname{Ker}(T))$, *genannt* Defekt von T.

Bemerkung: Der Defekt $n(T)$ ist ein Maß dafür, wieweit T davon entfernt ist injektiv zu sein, wobei $n(T) = 0$, genau dann, wenn T injektiv ist. Der Rank $r(T)$ ist ein Maß dafür, wieweit T davon entfernt ist surjektiv zu sein, wobei $r(T) = \dim W$, genau dann, wenn T surjektiv ist.

Beweis. i) Da $\operatorname{Ker} T \leq V$ nach Lemma 7.10, wähle Basis $\{v_1, \dots, v_k\}$ von $\operatorname{Ker}(T)$ und ergänze diese Basis mit dem Basisergänzungssatz 5.16 zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ von V. Wir zeigen $B \coloneqq \{Tv_{k+1}, \dots, Tv_n\}$ ist eine Basis von $\operatorname{im}(T)$. Angenommen dies gilt, dann ist

$$\begin{aligned} \dim V = n &= (n-k) + k \\ &= \dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\operatorname{Ker}(T)) \\ &= r(T) + n(T). \end{aligned}$$

ii) Unsere erste Behauptung ist $\text{im}(T) = \text{Span}(B)$. Hierzu müssen wir zwei Mengeninklusionen zeigen. Es ist $B \subseteq \text{im}(T)$ und $\text{im}(T) \leqslant W$ Unterraum. Dann ist $\text{Span}(B) \subseteq \text{im}(T)$. Umgekehrt, sei $w \in \text{im}(T)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $Tv = w$. Da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist, folgt, dass es $\lambda_i \in K$ gibt, mit $v = \sum \lambda_i v_i$. Damit ist

$$\begin{aligned} w = Tv = T(\textstyle\sum \lambda_i v_i) &= \textstyle\sum \lambda_i T v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(v_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(v_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(v_i) \in \text{Span}(B). \end{aligned}$$

Also ist $\text{im}(T) \subseteq \text{Span}(B)$.

iii) Unsere nächste Behauptung ist, dass B linear unabhängig ist. Hierzu sei

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(v_i) = T(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i),$$

für $\lambda_i \in K$, mit $k+1 \leq i \leq n$. Damit ist $z := \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \in \text{Ker}(T)$. Da $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Basis von $\text{Ker}(T)$ ist, gibt es $\lambda_i \in K$ mit $1 \leq i \leq k$ und mit $z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$. Damit folgt

$$\sum_{i=1}^{k} (-\lambda_i) v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = -z + z = 0.$$

Da die Vektoren v_i linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i = 0$ für alle i, insbesondere für alle $i > k$.

$\square$

Korollar 7.17. *Sei $T : V \to W$ linear, und $\dim V = \dim W$. Dann sind äquivalent:*

1. *T ist injektiv;*
2. *T ist surjektiv;*
3. *T ist bijektiv;*
4. *ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so ist $T(B)$ eine Basis von W.*

Beweis. a) Angenommen T ist injektiv. Nach Lemma 7.10 ist $\text{Ker}\, T = \{0\}$ und somit $n(T) = 0$. Mit Theorem 7.16 gilt dann $\dim W = \dim(V) = r(T)$. Da $\text{im}(T) \leq W$, folgt mit Korollar 5.17, dass $\text{im}(T) = W$ ist. Also ist T surjektiv, und damit auch bijektiv. Umgekehrt folgt aus der Bijektivität einer Abbildung auch, dass sie surjektiv beziehungsweise injektiv ist. Die drei ersten Aussagen sind also äquivalent.

b) Wir zeigen, dass aus der vierten Aussage die zweite Aussage folgt. Sei B ist eine Basis von V, mit $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, dann ist $T(B) = \{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ nach Voraussetzung eine Basis von W. Daraus folgt $\text{im}(T) = \text{Span}(T(B)) = W$. Also ist T surjektiv.

c) Zuletzt zeigen wir, dass aus der zweiten Aussage die vierte Aussage folgt. Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Sei T surjektiv. Nach a) gilt, dass T injektiv ist. Damit ist $T(B)$ eine Basis von W nach Lemma 7.11. $\square$

Als Anwendung von Theorem 7.16 erhalten wir einen alternativen Beweis von Theorem 6.8:

Theorem 7.18. *Seien $U_1, U_2 \leqslant V$ Unterräume. Dann gilt*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis. Sei $\varphi : U_1 \times U_2 \to V$, $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$. Nach Beispiel 7.7 ist φ linear. Es ist $\operatorname{Ker} \varphi = \{(u_1, u_2) \mid u_1 + u_2 = 0\} = \{(u, -u) \mid u \in U_1 \cap U_2\} \simeq U_1 \cap U_2$. Weiter haben wir $\operatorname{im} \varphi = U_1 + U_2$. Mit Theorem 7.16 folgt

$$\begin{aligned}\dim U_1 + \dim U_2 &= \dim(U_1 \times U_2) \overset{7.16}{=} \dim(\operatorname{im} \varphi) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi) \\ &= \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).\end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt aus folgender Überlegung: Sei $\{u_1, \dots, u_s\}$ eine Basis von U_1, und sei $\{v_1, \dots, v_t\}$ eine Basis von U_2. Dann ist die Menge $\{(u_i, 0), (0, v_j) \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\}$ eine Basis von $U_1 \times U_2$. Es ist dem Leser überlassen hierzu die Details auszuarbeiten. $\square$

Als letzte Anwendung von Theorem 7.16 in diesem Kapitel wollen wir beweisen, dass der in Theorem 2.18 definierte Rang einer Matrix, mit ihrem in Definition 6.3 definierten Spalten- beziehungsweise Zeilenrang übereinstimmt. Hierbei ist der Rang einer Matrix definiert als die Anzahl der führenden Einträge in ihrer Zeilenreduzierten Stufenform.

Bemerkung 7.19. a) Sei $A \in M_{m \times n}(K)$. Nach Beispiel 7.3 ist $T_A : K^n \to K^m$, definiert durch $x \mapsto Ax$, eine lineare Abbildung. Es ist:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(T_A) &= \{x \in K^n \mid Ax = 0\} \\ &= \text{Lösungen des homogenen LGS } Ax = 0 \\ &=: \mathrm{N}(A), \text{ der sogenannte } \textit{Nullraum von } A, \\ \operatorname{im}(T_A) &= \{b \in K^m \mid \exists x \in K^n \text{ mit } Ax = b\} \\ &= \{b \in K^m \mid Ax = b \text{ hat eine Lösung}\} \\ &=: \operatorname{im}(A), \text{ das sogenannte } \textit{Bild von } A.\end{aligned}$$

Seien $a^1, \dots, a^n$ die Spalten von A. Sei $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ die Standardbasis von K^n, siehe Beispiel 5.6. Dann ist $K^n = \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$, und es folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(A) = \operatorname{im}(T_A) &\overset{7.11}{=} \operatorname{Span}\{Te_1, \dots, Te_n\} \\ &\overset{\text{Def T}}{=} \operatorname{Span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\} = \operatorname{Span}\{a^1, \dots, a^n\} = \mathrm{SR}(A).\end{aligned}$$

b) Nach Definition 6.3 ist der Spaltenrang von A gegeben durch $\dim \mathrm{SR}(A) \overset{7.19}{=} \dim(\operatorname{im} A)$ und der Zeilenrang von A durch $\dim \mathrm{ZR}(A)$. Mit Korollar 6.5 gilt, dass der Zeilenraum $\mathrm{ZR}(A)$, und damit der Zeilenrang von A, sich nicht ändern, wenn wir elementare Zeilenumformungen auf A anwenden. Analoges gilt für den Spaltenraum beziehungsweise den Spaltenrang, wenn wir elementare Spaltenumformungen anwenden. Was passiert aber, falls wir elementare Spaltenumformungen auf den Zeilenraum $ZR(A)$ anwenden, oder analog, elementare Zeilenumformungen auf den Spaltnraum $\mathrm{SR}(A)$? Sei zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei B die Matrix, die wir erhalten, wenn wir von der dritten Spalte von A die zweite Spalte abziehen, dass heißt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathrm{Span}\{(1,0,0)^T, (0,1,1)^T\} \neq \mathrm{Span}\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T\}$, also $\mathrm{ZR}(A) \neq \mathrm{ZR}(B)$; es ist aber $\dim \mathrm{ZR}(A) = \dim \mathrm{ZR}(B)$.

Theorem 7.20 (Rangsatz)**.** *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$.*

a) Ensteht $B \in M_{m\times n}(K)$ aus A durch eine endliche Folge elementarer Spaltenumformungen und/oder Zeilenumformungen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \textit{Spaltenrang}(A) &= \textit{Spaltenrang}(B), \\ \textit{Zeilenrang}(A) &= \textit{Zeilenrang}(B). \end{aligned}$$

b) Sei $A \xrightarrow{EZU\text{'s}} E$ mit E in zeilenreduzierter Stufenform mit r führenden Einträgen. Dann ist $r = \mathit{Rang}(A) = \mathit{Zeilenrang}(A) = \mathit{Spaltenrang}(A)$.

Beweis. a) i) Sei $T_A : K^n \to K^m$ mit $x \mapsto Ax$ und sei $T_B : K^n \to K^m$, mit $x \mapsto Bx$. Nach Beispiel 7.3 sind T_A und T_B lineare Abbildungen. Angenommen B ergibt sich durch elementare Zeilenumformungen aus A, dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T_A) &= \{x \mid Ax = 0\} \\ &= \text{Lösungsmenge von } Ax = 0 \\ &\overset{2.11}{=} \text{Lösungsmenge von } Bx = 0 \\ &= \mathrm{Ker}(T_B). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \text{Spaltenrang von } A &= \dim(\mathrm{SR}(A)) \\ &\overset{7.19}{=} \dim(\mathrm{im}\, T_A) \\ &\overset{7.16}{=} n - \dim(\mathrm{Ker}\, T_A) \\ &= n - \dim(\mathrm{Ker}\, T_B) \\ &\overset{7.16}{=} \dim(\mathrm{im}\, T_B) \\ &\overset{7.19}{=} \text{Spaltenrang von } B. \end{aligned}$$

Angenommen B entsteht aus A durch elementare Spaltenumformungen. Nach Korollar 6.5 ist $\mathrm{SR}(A) = \mathrm{SR}(B)$, folglich ist auch in diesem Fall $\mathrm{Spaltenrang}(A) = \mathrm{Spaltenrang}(B)$.

ii) Angenommen B entsteht durch elementare Spalten- und Zeilenumformungen aus A. Beim Transponieren werden Zeilen und Spalten vertauscht. Dann ergibt sich auch B^T in analoger Weise aus A^T. Es folgt damit

$$\begin{aligned}\text{Zeilenrang } (A) &= \text{Spaltenrang } A^T \\ &\overset{i)}{=} \text{Spaltenrang } B^T \\ &= \text{Zeilenrang } B.\end{aligned}$$

b) Wir folgen den Beweisschritten aus Theorem 2.18.

i) Bringe A durch elementare Zeilenumformungen auf zeilenreduzierte Stufenform E. Angenommen Matrix E besitzt r führende Einträge. In den Spalten mit einem führenden Eintrag sind alle anderen Werte Null. Man sieht leicht, dass dann die r Zeilen ungleich Null linear unabhängig sind. Damit ist $\dim \mathrm{ZR}(E) = r$. Es folgt also $\mathrm{Rang}(A) \overset{2.18}{=} r = \mathrm{Zeilenrang}(E) \overset{6.5}{=} \mathrm{Zeilenrang}(A)$.

ii) Wir bringen nun E durch elementare Spaltenumformungen auf die Form

$$J := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei I_r die $r \times r$ Einheitsmatrix ist, mit r aus i). Es folgt mit a), dass $\mathrm{Spaltenrang}(A) \overset{a)}{=} \mathrm{Spaltenrang}(E) \overset{6.5}{=} \mathrm{Spaltenrang}(J) = r = \mathrm{Rang}(A)$.

Insgesamt gilt also $\mathrm{Zeilenrang}(A) \overset{i)}{=} \mathrm{Rang}(A) \overset{ii)}{=} \mathrm{Spaltenrang}(A)$.

□

Kapitel 8

Matrix einer linearen Abbildung

Sei K ein Körper, V und W endlich dimensionale K-Vektorräume und $T : V \to W$ linear. In diesem Kapitel zeigen wir, dass jede lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen K-Vektorräumen im wesentlich durch Multiplikation mit einer Matrix beschrieben werden kann.

Sei $v \in V$, dann existieren eindeutige Elemente $\lambda_i \in K$ mit $v = \sum \lambda_i v_i$. Sei $T : V \to W$ linear, dann ist $T(v) = \sum \lambda_i T(v_i)$. Also ist T eindeutig durch die Bilder $T(v_1)$, …, $T(v_n)$ bestimmt. Anders formuliert:

Bemerkung 8.1. Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V und sei $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$. Es gibt genau eine lineare Abbildung $T : V \to W$ mit $Tv_i = w_i$ für $1 \le i \le n$. Hierbei ist die Abbildung T genau dann injektiv, wenn $\{w_1, \dots, w_n\}$ linear unabhängig ist.

Beweis. a) *Existenz:* Seien $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$. Sei $v \in V$ mit $v = \sum \nu_i v_i$. Definiere $T : V \to W$ mit $T(v) = \sum \lambda_i w_i$. Sei $v_1 = \sum \lambda_i v_i$ und $v_2 = \sum \mu_i v_i$ und sei $\alpha \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + v_2) &= T(\alpha \sum \lambda_i v_i + \sum \mu_i v_i) \\ &= T\left(\sum (\alpha\lambda_i + \mu_i) v_i\right) \\ &= \sum (\alpha\lambda_i + \mu_i) w_i \\ &= \alpha \sum \lambda_i w_i + \sum \mu_i w_i \\ &= \alpha T(v_1) + T(v_2). \end{aligned}$$

Also existiert eine lineare Abbildung $T : V \to W$ mit $T(v_i) = w_i$, für $1 \le i \le n$.

Eindeutigkeit: Sei $S : V \to W$ eine weitere lineare Abbildung mit $S(v_i) = w_i$ für $1 \le i \le n$. Sei $v = \sum \lambda_i v_i \in V$. Dann ist

$$S(v) = S(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i S(v_i) = \sum \lambda_i w_i = T(v).$$

Aus $S(v) = T(v)$ für alle $v \in V$, folgt $S = T$.

b) Sei $\{w_1, \dots, w_n\}$ linear unabhängig. Sei $v \in \operatorname{Ker}(T)$, etwa $v = \sum \lambda_i v_i$, dann folgt $0 = Tv = T(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i w_i$. Da die w_i linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i = 0$ für alle i, und damit ist auch $v = 0$. Folglich ist $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Nach Lemma 7.10 ist T injektiv. Die umgekehrte Richtung folgt aus Lemma 7.11. $\square$

Beispiel 8.2. In Bemerkung 8.1 ist es wichtig, dass B eine Basis ist.

a) Sei $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,2)^T$, $w_1 = (1,0)^T$, $w_2 = (0,1)^T \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\{v_1, v_2\}$ linear abhängig, also keine Basis von $\mathbb{R}^2$. Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $T(v_i) = w_i$ linear. Dann folgt $(0,1)^T = w_2 = T(v_2) = T(2 \cdot v_1) = 2T(v_1) = 2w_1 = (2,0)^T$, was offensichtlich falsch ist und zu einem Widerspruch führt. Es gibt also kein $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, mit $Tv_i = w_i$.

b) Sei $v_1 = (1,1)^T$, $v_2 = (2,2)^T$, $w_1 = (1,0)^T$, $w_2 = (2,0)$, dann ist $\{v_1, v_2\}$ keine Basis in $\mathbb{R}^2$. Sei $T(x,y)^T := (x,0)^T$ und $S(x,y)^T := (x, x-y)^T$. Dann ist sowohl T als auch S linear mit $T(v_i) = w_i$ und $S(v_i) = w_i$ wobei $T \neq S$ ist.

Definition 8.3. Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W. Sei $T : V \to W$ linear.

a) Nach Theorem 5.4 gibt es für alle $v \in V$ eindeutige $\lambda_i \in K$, mit $v = \sum \lambda_i v_i$. Der Vektor $M_B(v) := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ heißt *Koordinatenvektor* von v bezüglich Basis B.

b) Da $Tv_j \in W$ für $1 \leq j \leq n$, und C Basis von W, existieren nach Theorem 5.4 eindeutige Elemente $a_{ij} \in K$ mit

$$\begin{aligned} Tv_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ Tv_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ Tv_n &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m, \end{aligned}$$

das heißt $Tv_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$. Sei

$$M_C^B(T) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

die (darstellende) Matrix von T (oder korrespondierend zu T) bezüglich der Basen B und C.

Beispiel 8.4. Sei $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ Differentiation nach x, als T gegeben durch $f = \sum a_i x^i \mapsto f' = \sum i a_i x^{i-1}$. Wir wählen die Basen $B = C = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ von $\mathbb{R}_n[x]$. Dann ist die Matrixdarstellung von T gegeben durch

$$M_C^B(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Beispiel 8.5. Sei $T : V \to V$ die Identitätsabbildung, d.h. $T(v) = v$, für alle $v \in V$. Sei $n = \dim(V)$. Wir erhalten

$$M_B^B(T) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

für jede beliebige Basis B von V.

Beispiel 8.6. Sei $B_1 = \{v_1, v_2\}$ eine Basis von V und $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis von W. Sei $T : V \to W$ linear mit

$$M_{B_2}^{B_1}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =: A.$$

Nach Definition 8.3 ist $Tv_1 = 1w_1 + 0w_2 - 3w_3$ und $Tv_2 = 2w_1 + w_2 - w_3$. Zu $v \in V$ existieren eindeutige $x, y \in K$ mit $v = xv_1 + yv_2$, womit folgt

$$\begin{aligned} Tv &= T(xv_1 + yv_2) \\ &= xT(v_1) + yT(v_2) \\ &= (x + 2y)w_1 + yw_2 + (-3x - y)w_3. \end{aligned}$$

Der Koordinatenvektor von v bezüglich B_1 ist $(x, y)^T$ und der Koordinatenvektor von Tv bezüglich B_2 ist $(x + 2y, y, -3x - y)^T$. Wir sehen also, dass

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \\ -3x - y \end{pmatrix}.$$

Theorem 8.7. *Sei $T : V \to W$ linear, B Basis von V und C Basis von W. Dann ist $M_C(Tv) = M_C^B(T) \cdot M_B(v)$.*

Bild:

$$\begin{tikzcd}
M_B(v) \arrow[rrr] & & & M_C(Tv) \\
& K^n \arrow[r, "M_C^B(T)\cdot"] & K^m & \\
& V \arrow[u, "\cong (\psi)"] \arrow[r, "T"] & W \arrow[u, "\cong (\psi)"'] & \\
v \arrow[uuu] \arrow[rrr] & & & Tv \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V und $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basis von W. Sei $A = (a_{ij})$ mit $Tv_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$, für $1 \leq j \leq n$. Sei $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$ mit $\lambda_j \in K$. Dann folgt

$$\begin{aligned} Tv = T\left(\sum \lambda_j v_j\right) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j T(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j\right) w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left[A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\right]_i w_i \ . \end{aligned}$$

Also

$$M_C(Tv) = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M_C^B(T) \cdot M_B(v) \ . \qquad \square$$

Theorem 8.8. *Sei B_V Basis von V und B_W Basis von W. Seien $S, T : V \to W$ linear, $\lambda \in K$. Dann sind $S + T$, $\lambda S : V \to W$ linear mit darstellenden Matrizen*

$$\begin{aligned} M_{B_W}^{B_V}(S+T) &= M_{B_W}^{B_V}(S) + M_{B_W}^{B_V}(T) \\ M_{B_W}^{B_V}(\lambda \cdot S) &= \lambda \cdot M_{B_W}^{B_V}(S) \ . \end{aligned}$$

Beweis. Sei $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Sei $Sv_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$, für $1 \leq j \leq n$, das heisst, $M_{B_W}^{B_V}(S) = (a_{ij})$. Sei $Tv_j = \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i$, mit $1 \leq j \leq n$, das heisst, $M(T) = (b_{ij})$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (S+T)(v_j) &\overset{\text{Def}}{=} S(v_j) + T(v_j) \\ &= \sum a_{ij} w_i + \sum b_{ij} w_i \\ &= \sum (a_{ij} + b_{ij}) w_i \ , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} M_{B_W}^{B_V}(S+T) &= (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) \\ &= M_{B_W}^{B_V}(S) + M_{B_W}^{B_V}(T) \ . \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot S)(v_j) &\overset{\text{Def}}{=} \lambda S(v_j) \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^m (\lambda a_{ij}) \cdot w_i \ , \end{aligned}$$

also

$$M_{B_W}^{B_V}(\lambda \cdot S) = (\lambda a_{ij}) = \lambda \cdot (a_{ij}) = \lambda \cdot M_{B_W}^{B_V}(S) \ . \qquad \square$$

Theorem 8.9. *Sei $S : V \to W,\ T : U \to V$ linear, dann ist $S \circ T : U \to W$ linear mit*
$$M_{B_W}^{B_U}(S \circ T) = M_{B_W}^{B_V}(S) \cdot M_{B_V}^{B_U}(T) \ .$$

Beweis. Die Linearität gilt nach Lemma 7.4. Sei $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ Basis von U, $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ Basis von V und $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$ Basis von W. Sei

$$M_{B_V}^{B_U}(T) = (a_{ij}) = A, \text{ das heisst, } Tu_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j, \tag{8.1}$$
$$M_{B_W}^{B_V}(S) = (b_{ij}) = B, \text{ das heisst, } Sv_j = \sum_{l=1}^{k} b_{lj} w_l, \tag{8.2}$$
$$M_{B_W}^{B_U}(S \circ T) = (c_{ij}) = C. \tag{8.3}$$

Es ist

$$\begin{aligned}(S \circ T)(u_i) &\overset{\text{Def} \circ}{=} S(T(u_i)) \overset{(8.1)}{=} S\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j\right) \overset{S \text{ lin.}}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} S(v_j) \\ &\overset{(8.2)}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \sum_{l=1}^{k} b_{lj} w_l = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} b_{lj} w_l = \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{lj} a_{ji}\right) w_l \ ,\end{aligned}$$

also folgt mit Gleichung (8.3): $c_{li} = \sum_{j=1}^{m} b_{lj} a_{ji} = (B \cdot A)_{li}$. Es folgt $C = B \cdot A$. □

Korollar 8.10. *Sei $T : U \to V$ linear. Ist T invertierbar, so ist $T^{-1} : V \to U$ linear mit $M_{B_U}^{B_V}(T^{-1}) = M_{B_V}^{B_U}(T)^{-1}$, wobei B_U eine Basis von U und B_V eine Basis von V ist.*

Beweis. Linearität gilt nach Lemma 7.4. Es ist nach Voraussetzung: $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_U,\ T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_V$. Da V und W isomorphe Vektorräume sind, mittels T, haben sie nach Korollar 7.13 dieselbe Dimension. Sei $\dim U = \dim V = n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_n &\overset{8.5}{=} M_{B_U}^{B_U}(\mathrm{id}_U) = M_{B_U}^{B_U}(T^{-1} \circ T) \\ &\overset{8.9}{=} M_{B_U}^{B_V}(T^{-1}) \cdot M_{B_V}^{B_U}(T), \end{aligned}$$

und analog gilt $I_n = M_{B_V}^{B_U}(T) \cdot M_{B_U}^{B_V}(T^{-1})$. Also ist $M_{B_V}^{B_U}(T)$ invertierbar mit

$$M_{B_V}^{B_U}(T)^{-1} = M_{B_U}^{B_V}(T^{-1}) \ .$$ □

Definition 8.11. Seien B, C Basen von V. Die Matrix $M_C^B(\mathrm{id}_V)$ heißt *Basiswechselmatrix von B zu C*.

Bemerkung 8.12. Nimmt man $T = \mathrm{id}_V : V \to V$ in Theorem 8.7, dann folgt

$$M_C(v) = M_C^B(\mathrm{id}_V) \cdot M_B(v) \ .$$

Theorem 8.13. *Sei $T : V \to W$ linear. Seien B_V, C_V Basen von V und B_W, C_W Basen von W. Dann gilt*

$$M_{C_W}^{C_V} = P \cdot M_{B_W}^{B_V}(T) \cdot Q^{-1}$$

mit $P =$ Basiswechselmatrix von B_W zu C_W und $Q =$ Basiswechselmatrix von B_V zu C_V.

Die Gleichung lässt sich gut aus dem folgenden Bild ablesen:

$$\begin{tikzcd} \underset{C_V}{V} \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[rrr, bend right, "T"'] & \underset{B_V}{V} \arrow[r, "T"] & \underset{B_W}{W} \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] & \underset{C_W}{W} \end{tikzcd}$$

Beweis. Mit Theorem 8.9 folgt:

$$\begin{aligned} M_{C_W}^{C_V}(T) &= M_{C_W}^{C_V}(\mathrm{id}_W \circ T \circ \mathrm{id}_V) \\ &= \underbrace{M_{C_W}^{B_W}(\mathrm{id}_W)}_{=:P}\, M_{B_W}^{B_V}(T)\, \underbrace{M_{B_V}^{C_V}(\mathrm{id}_V)}_{=:Q^{-1}} \\ &= M_{C_W}^{B_W}(\mathrm{id}_W) \cdot M_{B_W}^{B_V}(T) \cdot M_{C_V}^{B_V}(\mathrm{id})^{-1}\ . \end{aligned}$$ □

Beispiel 8.14. (siehe Beispiel 8.6)
Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$M_{B_2}^{B_1}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =: A\ ,$$

wobei $B_1 = \{v_1, v_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist und $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Man sieht leicht, dann ist $B_3 \coloneqq \{u_1, u_2\}$ mit $u_1 \coloneqq v_1 - 2v_2,\ u_2 \coloneqq v_1 + v_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, und $B_4 \coloneqq \{z_1, z_2, z_3\}$ mit

$$\begin{aligned} z_1 &\coloneqq w_1 + w_2 \\ z_2 &\coloneqq w_2 + w_3 \\ z_3 &\coloneqq w_3 + w_1 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Was ist $M_{B_4}^{B_3}(T)$?

(i) Das lösen eines entsprechenden linearen Gleichungssystems liefert

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3) \\ w_2 &= \frac{1}{2}(z_2 - z_3 + z_1) \\ w_3 &= \frac{1}{2}(z_3 + z_2 - z_1) \end{aligned}$$

(ii) Es ist

$$\begin{aligned} Tu_1 &= T(v_1 - 2v_2) \\ &= Tv_1 - 2Tv_2 \\ &= (w_1 - 3w_3) - 2(2w_1 + w_2 - w_3) \\ &= -3w_1 - 2w_2 - w_3 \\ &\overset{i)}{=} \dots \\ &= -2z_1 - z_3 \end{aligned}$$

Analog $Tu_2 = T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = (w_1 - 3w_3) + (2w_1 + w_2 - w_3) = 3w_1 + w_2 - 4w_3 \overset{i)}{=} \ldots = 4z_1 - 3z_2 - z_3$. Also

$$M_{B_4}^{B_3}(T) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =: B\ .$$

(b) Was ist die Beziehung zwischen A und B? Wir demonstrieren Theorem 8.13. Die gegebene Situation ist durch das folgende Bild zusammengefasst:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "T", "A"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R}^3 \\ B_3 \arrow[rrr, bend right, "T"'] & B_1 & B_2 & B_4 \end{tikzcd}$$

Es ist

$$Q := M_{B_4}^{B_2}(\mathrm{id}) \overset{(a)(i)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1} := M_{B_3}^{B_1}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Dann gilt nach Theorem 8.13, dass $B = QAP^{-1}$. Wir rechnen diese Gleichung nach:

$$\begin{aligned} QAP^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Bemerkung 8.15. Jede invertierbare Matrix kann als Basiswechselmatrix interpretiert werden.

Beweis. Sei $P = (p_{ij}) \in M_n(K)$ invertierbar. Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\} =: B$. Setze $C := \{v_1', \ldots, v_n'\}$ mit

$$v_j' := \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i, \text{ mit } 1 \leq j \leq n\ .$$

Wir zeigen, dass C eine Basis von V ist.

Angenommen

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v'_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \lambda_j \right) v_i \ .$$

Da B linear unabhängig ist, folgt $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\lambda_j = 0$ für alle i. Diese n Gleichungen entsprechen gerade der Matrixgleichung

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Da P invertierbar ist, folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\lambda_i = 0$ für alle i. Damit ist C linear unabhängig. Da die Mächtigkeit von C gerade der Dimension von V entspricht, ist C eine Basis von V. □

Bemerkung 8.16. Zwei quadratische $n \times n$-Matrizen A und B heissen *ähnlich*, genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix P gibt mit $B = PAP^{-1}$. Ähnliche Matrizen beschreiben also genau denselben Endomorphismus T des K^n, bezüglich verschiedener Basen. Man sieht leicht, dass Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist. In der Vorlesung Lineare Algebra II klassifizieren wir die Endomorphismen T, indem wir die Äquivalenzklassen klassifizieren. Wir suchen hierbei nach einer Basis B des K^n, die einen besonders einprägsame darstellende Matrix $M_B(T)$ liefert.

Kapitel 9

Die Determinante

Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. In Theorem 2.16 haben wir Charakterisierungen invertierbarer Matrizen gesehen. Diese werden wir in diesem Kapitel noch ergänzen.

Bemerkung 9.1. Sei $A \in M_n(K)$ mit A invertierbar. Nach Theorem 2.16 hat das lineare Gleichungssystem $A = 0$ dann nur die Lösung $x = 0$. Es ist also

$$\operatorname{Ker} T_A = \{x \mid Ax = 0\} = \{0\}.$$

Mit der Rang-Defekt-Formel 7.16 folgt Rang $\mathrm{r}(A) = n$. Umgekehrt, sei $\mathrm{r}(A) = n$ und sei E Zeilen-reduzierte Stufenform von A. Bei elementaren Zeilenmformungen ändert sich der Zeilenrang nicht, mit Theorem 7.20 ist also $\mathrm{r}(E) = n$, und damit $E = I_n$. Mit Theorem 2.16 folgt, dass A invertierbar ist.

Wir haben hiermit gesehen, dass die Matrix A genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{r}(A) = n$. Nach dem Rangsatz 7.20 passiert letzteres genau dann, wenn A aus n linear unabhängigen Spaltenvektoren besteht, was wiederum äquivalent dazu ist, dass A aus n linear unabhängigen Zeilenvektoren besteht. Wir sehen in diesem Kapitel: A ist invertierbar, genau dann, wenn die sogenannte Determinante $\det A$ $\neq 0$ ist. Determinanten zu definieren ist abstrakter und komplexer als unsere bisherigen Definitionen. Wir betrachten daher zunächst den kleinsten interessanten Fall, die 2×2-Matrizen.

Beispiel 9.2. Wir geben ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Invertierbarkeit von 2×2-Matrizen: Matrix $A = (a_{ij}) \in M_2(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Wir sehen später, dass $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ist.

Beweis.

a) Sei $a_{11} = 0$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ist A invertierbar, dann ist $\mathrm{r}(A) = 2$ nach Bemerkung 9.1, was genau dann gilt, wenn $a_{12} \neq 0$ und $a_{21} \neq 0$. Damit ist $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

b) Sei nun $a_{11} \neq 0$. Dann bringen wir A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilen-reduzierte Stufenform

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & a_{12}a_{11}^{-1} \\ 0 & a_{22} - a_{21}a_{12}a_{11}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung 9.1 ist A invertierbar, wenn $\mathrm{r}(A) = 2$ ist, was genau dann gilt, wenn $a_{22} - a_{21}a_{12}a_{11}^{-1} \neq 0$ ist, also wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ gilt.

□

Beispiel 9.3. Wir benutzen nun das Beispiel der 2×2-Matrizen, um die allgemeine Definition der Determinante zu motivieren. Definiere $\det : M_2(K) \to K$ durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Wir schreiben im folgenden $A = (a_1 \mid a_2)$ als Matrix mit den Spalten $a_1 = (a_{11}, a_{21})^T$ und $a_2 = (a_{12}, a_{22})^T$. Wir fassen det als Abbildung auf den Spalten von A auf. Dann hat die Abbildung det die folgenden Eigenschaften:

D1) det ist *multilinear*, das heisst linear in der i-ten Spalte, mit $i = 1, 2$. Sei $b_1 = (b_{11}, b_{21})^T \in K^2$, dann folgt direkt aus der obigen Definition der Determinante, dass

$$\det(a_1 + b_1 \mid a_2) = \det(a_1|a_2) + \det(b_1 \mid a_2),$$

Analog zeigen wir $\det(\lambda a_1 \mid a_2) = \lambda \det(a_1 \mid a_2)$. Somit ist det linear in der 1. Spalte. Analog gilt die Linearität für die 2. Spalte.

D2) Sei $a_1 = a_2 = (x, y)^T$, dann ist $\det(a_1 \mid a_2) = xy - xy = 0$. Wir sagen, dass det *alternierend* ist.

D3) Nach obiger Definition von det gilt:

$$\det(I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Wir sagen, dass det *normiert* ist.

Definition 9.4. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $\det : M_n(K) \to K$ heißt *Determinante*, wenn gilt:

D1) det ist *multilinear*, das heisst, det ist linear in jeder Spalte, also für $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\det(a_1 \mid \cdots \mid \lambda a_k \mid \cdots \mid a_n) = \lambda \det(a_1 \mid \cdots \mid a_n),$$

und

$$\det(a_1 \mid \cdots \mid a_k + a_k' \mid \cdots \mid a_n) = \det(a_1 \mid \cdots \mid a_k \mid \cdots \mid a_n) + \det(a_1 \mid \cdots \mid a_k' \mid \cdots \mid a_n).$$

D2) det ist *alternierend* in den Spalten, das heisst $\det(\cdots \mid a_i \mid \cdots \mid a_i \mid \dots) = 0$.

D3) det ist *normiert*, das heisst $\det(I_n) = 1$.

Bemerkung: Wir zeigen später, dass es genau eine Abbildung gibt, die diese Eigenschaften erfüllt. Insbesondere folgt dann aus dem letzten Beispiel, dass die Determinante einer 2×2-Matrix A gerade durch $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ gegeben ist.

Bemerkung 9.5. Sei det eine Determinante, dann gelten die folgenden Eigenschaften:

a) Die Determinante einer Matrix mit mindestens einer Nullspalte ist Null. Gegeben sei eine Matrix $A = (a_1 \mid \cdots \mid a_k \mid \cdots \mid a_n)$ mit $a_k = 0$. Dann ist

$$\det A = (a_1 \mid \cdots \mid 0 \cdot a_k \mid \cdots \mid a_n) \overset{\text{D1)}}{=} 0 \cdot \det A = 0.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{D2)}}{=} \det(\cdots \mid a_k + a_l \mid \cdots \mid a_k + a_l \mid \dots) \\ &\overset{\text{D1), D2)}}{=} \det(\cdots \mid a_k \mid \cdots \mid a_l \mid \dots) + \det(\cdots \mid a_l \mid \cdots \mid a_k \mid \dots). \end{aligned}$$

Das ist gerade dann erfüllt, wenn

$$\det(\cdots \mid a_k \mid \cdots \mid a_l \mid \dots) = -\det(\cdots \mid a_l \mid \cdots \mid a_k \mid \dots), \tag{9.1}$$

also wenn die Determinante ihr Vorzeichen beim Vertauschen zweier beliebigen Spalten ändert. Induktiv folgt

$$\det(a_1 \mid \cdots \mid a_k \mid \cdots \mid a_n) = (-1)^{k-1} \det(a_k \mid a_1 \mid \cdots \mid a_n).$$

Beispiel 9.6. Sei det eine Determinante und sei $A \in M_n(K)$. Seien $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

a) Für die Elementarmatrizen aus Bemerkung 2.5 gilt:

$$\det P_{ii}(\lambda) = \lambda, \quad \det P_{ij}(\lambda) = 1 \quad \text{und} \quad \det Q_{ij} = -1.$$

Insbesondere folgt $\det P \neq 0$ für alle Elementarmatrizen P.

b) Es ist $\det(A \cdot P_{ii}(\lambda)) = \lambda \det(A)$ und $\det(AP_{ij}(\lambda)) = \det(A)$ und $\det(AQ_{ij}(\lambda)) = -\det(A)$. Insbesondere ist $\det(AP) = \det A \det P$ für Elementarmatrizen P.

c) Sei P Elementarmatrix. Dann ist die transponierte Matrix P^T wieder eine Elementarmatrix mit $\det(P) = \det(P^T)$.

Beweis. a) i) Sei

$$P_{ii}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq 0.$$

Damit ist $\det(AP_{ii}(\lambda)) = \det(a_1 \mid \cdots \mid \lambda a_i \mid \cdots \mid a_n) \overset{D1)}{=} \lambda \det A$.

ii) Sei

$$P_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(AP_{ij}(\lambda)) &= \det(\cdots \mid a_i \mid \cdots \mid \lambda a_i + a_j \mid \dots) \\ &\overset{D1)}{=} \det A + \lambda \det(\cdots \mid a_i \mid \cdots \mid a_i \mid \dots) \\ &\overset{D2)}{=} \det A. \end{aligned}$$

iii) Nach Bemerkung 9.5 b) gilt für Q_{ij}, dass $\det(A \cdot Q_{ij}) = -\det A$.

b) Wähle $A = I_n$ in a), dann ist mit D3) $\det(P_{ii}(\lambda)) = \lambda$, $\det(P_{ij}(\lambda)) = 1$ und $\det(Q_{ij}) = -1$. Insbesondere: $\det P \neq 0$ für eine Elementarmatrix P und die Rechnungen in a) zeigen $\det(AP) = \det(A)\det(P)$.

□

Theorem 9.7 (Produktsatz für Determinante)**.** *Sei* $\det : M_n(K) \to K$ *eine Determinante und seien* $A, B \in M_n(K)$*.*

1) Die Determinante ist multiplikativ, das heisst $\det(AB) = \det A \det B$*.*

2) Es ist $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ *ist invertierbar. In diesem Fall ist* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$*.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle, ob A invertierbar ist oder nicht.

a) Sei A invertierbar. Dann gibt es ein P, so dass $PA = I$, wobei $P = P_1 \dots P_t$ als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Es ist $P = A^{-1}$. Daraus folgt, dass $A = P^{-1} = P_t^{-1} \dots P_1^{-1}$, sich A also auch als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt. Wiederholtes Anwenden von Beispiel 9.6 ergibt:

$$\begin{aligned} \det(BA) &= \det(BP_t^{-1} \dots P_1^{-1}) \\ &= \det(BP_t^{-1} \dots P_2^{-1}) \det P_1^{-1} \\ &= \dots \\ &= \det B \det P_t^{-1} \dots \det P_1^{-1} \\ &= \dots \\ &= \det B \det A. \end{aligned}$$

Insbesondere, wähle $B = A^{-1}$, dann ist mit D3):

$$1 = \det I_n = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A.$$

Also ist $\det A \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

b) Sei A nicht invertierbar. Bringe A auf Spaltenreduzierte Stufenform AP, wobei P wieder ein Produkt von Elementarmatrizen ist. Damit ist P invertierbar.

Da A nicht invertierbar ist, hat die Spalten-reduzierte Stufenform AP mindestens eine Nullspalte. Dies folgt aus einem Spalten-Analogon von Theorem 2.16. Damit folgt aus Bemerkung 9.5, dass $\det AP = 0$ ist. Da P invertierbar ist, verwenden wir a) und formen um auf

$$0 = \det AP \overset{\text{a)}}{=} \det A \det P.$$

Da $\det P \neq 0$ nach a), ist $\det A = 0$.

Da A nicht invertierbar ist folgt mit Bemerkung 9.1, dass $\mathrm{r}(A) < n$ ist. Schreibe die linearen Abbildungen $T_A : K^n \to K^n, x \mapsto Ax$ und $T_B : K^n \to K^n, x \mapsto Bx$. Wende Theorem 7.16 auf die folgende lineare Abbildung an:

$$T_B\Big|_{\operatorname{im} A} : \operatorname{im} A \to K^n, \qquad Ax \mapsto BAx$$

Dann ist $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(T_B\big|_{\operatorname{im} A}) + n(T_B\big|_{\operatorname{im} A})$. Das kxsönnen wir aber schreiben als

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(BA) &= \dim(\operatorname{im} T_{BA}) = \dim \operatorname{im}(T_B\big|_{\operatorname{im} A}) \\ &= \mathrm{r}(T_B\big|_{\operatorname{im} A}) \\ &= \mathrm{r}(A) - n(T_B\big|_{\operatorname{im} A}) \\ &\leq \mathrm{r}(A) < n.\end{aligned}$$

Aus Bemerkung 9.1 folgt, dass BA nicht invertierbar ist. Aus dem ersten Teil von b) folgt $\det BA = 0$. Also gilt

$$\det(BA) = 0 = 0 \cdot \det B = \det A \det B.$$

□

Korollar 9.8 (Eindeutigkeit der Determinante)**.** *Zu jedem Körper K und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens eine Determinante* $\det : M_n(K) \to K$.

Beweis. Sei $A \in M_n(K)$. Angenommen A ist nicht invertierbar, dann ist $\det A = 0$ nach Theorem 9.7. Angenommen A ist invertierbar, dann schreiben wir A als Produkt von Elementarmatrizen, $A = \prod P_i$. Wir erhalten damit $\det A = \prod \det P_i$. Damit ist der Funktionswert $\det A$ eindeutig durch A bestimmt. Es gibt also höchstens eine Funktion $\det : M_n(K) \to K$. □

Korollar 9.9. *Für* $\det : M_n(K) \to K$ *eine Determinante gilt* $\det(A) = \det(A^T)$.

Beweis. Wir benutzen Bemerkung 9.1. Ist A nicht invertierbar, dann ist $\mathrm{r}(A) < n$. Folglich ist auch $\mathrm{r}(A^T) < n$ und A^T ist nicht invertierbar. Aus diesen Eigenschaften folgt $\det A = 0 = \det A^T$, nach Theorem 9.7.

Ist A invertierbar, dann schreiben wir A als Produkt von Elementarmatrizen, $A = \prod P_i$. Wir nutzen aus, dass nach Beispiel 9.6 die transponierte einer Elementarmatrix wieder eine Elementarmatrix ist mit der gleichen Determinante: $\det P_i = \det P_i^T$. Damit ist

$$A^T = \left(\prod P_i\right)^T = (P_1 \dots P_t)^T = P_t^T \dots P_1^T$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\det A^T &= \det P_t^T \dots \det P_1^T \\
&= \det P_t \dots \det P_1 \\
&= \det P_1 \dots \det P_t \\
&= \det \left(\prod P_i\right) \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 9.10. Mit Korollar 9.9 folgt, dass jede Eigenschaft einer Determinante, die für die Spalten von Matrizen gilt, analog auch für deren Zeilen gelten muss. Insbesondere

$$\det : M_n(K) \to K$$

ist eine Determinante, genau dann wenn D1) bis D3) für die Zeilen von Matrizen gelten.

Definition 9.11. Sei $A \in M_n(K)$. Seien $1 \leq i, j \leq n$. Matrix $A^{ij} \in M_{n-1}(K)$ ist definiert als die Matrix, die aus A durch streichen der i-te Zeile und der j-te Spalte entsteht.

Beispiel 9.12. Beispielsweise sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{dann ist} \quad A^{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Theorem 9.13 (Existenz der Determinante)**.** *Sei n eine natürliche Zahl. Definiere die Abbildung* $\det : M_n(K) \to K$ *durch*

$n = 1$*:* $\det(a_{11}) \coloneqq a_{11}$,

$n > 1$*:* $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{i1})$ *für* $A \in M_n(K)$.

Dann ist det *eine Determinante. Da nach Korollar 9.8 die Determinante eindeutig ist, sprechen wir im folgenden von der Determinanten.*

Beispiel 9.14. Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A^{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A^{21}) \\
&= a_{11} \det(a_{22}) - a_{21} \det(a_{12}) \\
&= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.
\end{aligned}$$

Und im Fall $n = 3$ gilt:

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A^{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A^{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A^{31}) \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

Beweis von Theorem 9.13. Wir machen Induktion nach n, und zeigen, dass D1) bis D3) für die Zeilen von $A \in M_n(K)$ gelten. Mit Bemerkung 9.10 folgt dann die Behauptung.

D1) Wir zeigen, dass die definierte Abbildung *det* linear in der ersten Zeile ist. Die Matrix A^{11} hängt nicht von der 1. Zeile von A ab, demnach ist der Summand $a_{11} \cdot \det A^{11}$ linear in der 1. Zeile von A. Sei $i > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist A^{i1} linear in der 1. Zeile, wonach $a_{i1} \det A^{i1}$ linear in der 1. Zeile ist. Es folgt insgesamt, dass det linear in der 1. Zeile ist. Analog gehen wir für jede andere Zeile vor. Folglich ist det *multilinear* und es gilt D1).

D2) Seien Zeilen k und l von A gleich, mit $k > l$. Sei $i \neq k, l$, dann hat A^{i1} zwei gleiche Zeilen. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\det A^{i1} = 0$. Daraus folgt

$$\det A = (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A^{k1}) + (-1)^{l+1} a_{l1} \det(A^{l1}). \tag{9.2}$$

Wir bezeichnen die Zeilen der Matrix A mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Im folgenden benutzen wir die Notation a_j sowohl für die $j$te Zeile von A, als auch für die um einen Eintrag verkürzte korrespondierende Zeilen von A^{k1} beziehungsweise A^{l1}. Nach Voraussetzung ist $a_k = a_l$ und es ist $A^{k1} = (a_1 \mid \cdots \mid a_l \mid \cdots \mid a_{k-1} \mid a_{k+1} \mid \cdots \mid a_n)^T$, sowie $A^{l1} = (a_1 \mid \cdots \mid a_{l-1} \mid a_{l+1} \mid \cdots \mid a_k \mid \cdots \mid a_n)^T$. Da $a_l = a_k$ haben beide Matrizen die selben Zeilen, nur in unterschiedlicher Reihenfolge. Wir sortieren die Zeilen so um, dass sie in der gleichen Reihenfolge $A' = (a_l = a_k \mid a_1 \mid \cdots \mid a_{l-1} \mid a_{l+1} \mid \ldots a_n)$ sind. Nach Bemerkung 9.5 brauchen wir für A^{k1} insgesamt $l - 1$ Vertauschungen um auf diese Form zu kommen. Wir erhalten

$$\det A^{k1} = (-1)^{l-1} \det A'.$$

Analog ergibt sich

$$\det A^{l1} = (-1)^{k-2} \det A',$$

da hier die Zeile a_l fehlt.

Wir setzten das in Gleichung (9.2) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{k+l} a_{k1} \det A' + (-1)^{k+l-1} a_{l1} \det A' \\ &= \left((-1)^{k+l} a_{k1} + (-1)^{k+l-1} a_{l1}\right) \det A' \\ &= 0 \cdot \det A' = 0.\end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Vorraussetzung $a_{k1} = a_{l1}$.

D3) Es ist $\det I_n \overset{\text{Def}}{=} (-1)^{1+1} a_{11} \det I_n^{11} + 0 + 0 + \cdots = 1 \cdot \det I_{n-1} = 1$.

$\square$

Korollar 9.15 (Laplacesche Entwicklungssatz)**.** *Sei $A \in M_n(K)$. Dann gelten die folgenden beiden Formeln:*

1. *Entwickelung nach j-ten Spalte:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}, \qquad \text{für } 1 \leq j \leq n.$$

2. *Entwickelung nach i-ten Zeile:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}, \qquad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Beweis. Wir definieren die beiden Matrizen $(a_{ij}) = A = (a_1 \mid \cdots \mid a_n)$ und $(b_{ij}) = B = (a_j \mid a_1 \mid \cdots \mid a_{j-1} \mid a_{j+1} \mid \cdots \mid a_n)$ mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ in den angegebenen Reihenfolgen. Dann gilt nach Bemerkung 9.5

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{j-1} \cdot \det B \\ &\overset{9.13}{=} (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det B^{i1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}. \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten Behauptung, zusammen mit Bemerkung 9.10. $\square$

Beispiel 9.16. a) Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Man nennt eine Matrix in dieser Form eine *obere Dreiecksmatrix*. Sind die Einträge auf ihrer Diagonale ebenfalls Null, so heisst sie *strikte* obere Dreiecksmatrix. Wir behaupten: Ist $A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix, dann ist $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Beweis. Wir machen Induktion nach n, und entwickeln die Determinante nach der ersten Spalte. Sei $n = 1$, dann ist $\det(a_{11}) = a_{11}$, und die Behauptung gilt. Sei $n \geq 1$ und $A \in M_n(K)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\det A &\overset{9.13}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det A^{i1} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det A^{11} + 0 + \cdots + 0 \\
&= a_{11} \cdot \det A^{11} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} a_{11} \prod_{i=2}^{n} a_{ii} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.
\end{aligned}$$

□

b) Sei $A \in M_n(K)$ und $B \in M_m(K)$. Sei

$$C \coloneqq \left[\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \in M_{n+m}(K).$$

Wir behaupten, dann ist $\det C = \det A \cdot \det B$.

Beweis. Wir machen Induktion nach $n+m$,und entwickeln die Determinante nach der ersten Spalte. Es ist

$$\begin{aligned}
\det C &\overset{9.13}{=} \sum_{i=1}^{n+m} (-1)^{i+1} c_{i1} \det C^{i1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \left[\begin{array}{c|c} A^{i1} & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \\
&\overset{\text{I.V}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det A^{i1} \det B \\
&\overset{9.13}{=} \det A \cdot \det B.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 9.17 (Vandermondsche Determinante)**.** Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschieden. Sei

$$A(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\det A = \prod_{j>i}(x_j - x_i)$.

Definition 9.18. Eine bijektive Abbildung $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt *Permutation* (von n Objekten). Wir definieren S_n als die Menge aller Permutationen von n Objekten. Die Menge S_n, zusammen mit Komposition von Abbildungen, ist eine Gruppe, siehe Beispiel 6.6 aus dem Grundlagenkapitel. Wir nennen S_n *symmetrische Gruppe von Grad n*. Wir wissen bereits aus dem Grundlagenkapitel, dass die Gruppe S_n nicht abelsch ist für $n \geq 3$, und es ist $|S_n| = n!$.

Notation 9.19. Für die Notation von Permutationen gibt es zwei Schreibweisen, die Matrix-Notation (siehe Grundlagenkapitel) und die Zykel-Notation:

a) Schreibe
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$
in der *Matrix-Notation* für die Permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Es ist zum Beispiel
$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{id}\,, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) In *Zykel-Notation* schreiben wir $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_r)$ für die Permutationen $\sigma \in S_n$ mit
$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto a_2 \\ a_2 &\mapsto a_3 \\ &\vdots \\ a_{r-1} &\mapsto a_r \\ a_r &\mapsto a_1. \end{aligned}$$
Mittels Komposition von Abbildungen $\sigma \circ \tau =: \sigma \cdot \tau = \sigma\tau$ gilt beispielweise:
$$\begin{aligned} &S_2 = \{(1)(2), (12)\}, \\ &S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)\}, \end{aligned}$$
beziehungsweise
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 5 & 8 & 9 & 2 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (162)(359)(48)(7).$$

Zyklen der Länge eins werden in dieser Schreibweise typischerweise nicht geschrieben. Sei $\alpha = (132)$ und $\beta = (415)$ mit $\alpha, \beta \in S_6$. Damit folgt $\alpha \cdot \beta = (132)(415) = (15432)$. Zykel $(a_1 \dots a_s)$ und $(b_1 \dots b_t)$ heissen *disjunkt*, falls $\{a_1, \dots a_s\} \cap \{b_1, \dots, b_t\} = \emptyset$ ist. Man sieht leicht, dass disjunkte Zykel kommutieren.

Theorem 9.20. *a) Jede Permutation kann als Produkt von disjunkten Zyklen geschrieben werden. Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf die Reihenfolge der Zykel.*

b) Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden. (Diese Darstellung ist nicht eindeutig.)

Beweis. Sei $\sigma = \mathrm{id}$, dann ist $\sigma = (1)(2)(3)\dots(n)$ Produkt disjunkter Zykel. Sei $\sigma \neq \mathrm{id}$.

i) Wähle $a_1 \in \{1, \dots, n\}$ beliebig mit $\sigma(a_1) \neq a_1$. Definiere $a_2 := \sigma(a_1)$. Wir setzten dieses Vorgehen induktiv fort: Falls $\sigma(a_i) \notin \{a_1, \dots, a_i\}$ ist, definiere $a_{i+1} := \sigma(a_i)$. Angenommen $\sigma(a_{i+1}) = a_j$ mit $2 \leq j \leq i$. Dann ist $\sigma(a_{j-1}) =$

$a_j = \sigma(a_{i+1})$, woraus aber $a_{j-1} = a_{i+1}$ aus der Bijektivität der Permutation folgt. Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion der Elemente a_i. Es ist also $\sigma(a_{i+1}) = a_j$ mit $j < i$ nur möglich für $j = 1$. Damit ist $\sigma(a_{i+1}) = a_1$. Sei $\tau_1 \coloneqq (a_1 \dots a_i)$. Dann ist insbesondere $\tau_1(b) = b$ für $b \notin \{a_1, \dots, a_i\}$, und es folgt $\tau_1^{-1} \circ \sigma(a_k) = \tau_1^{-1} a_{k+1} = a_k$ für $1 \leq k \leq i$.

ii) Angenommen $\{a_1, \dots, a_i\} \subsetneq \{1, \dots, n\}$ und $\tau_1^{-1}\sigma \neq \mathrm{id}$. Wähle b_1 mit $\tau^{-1}\sigma(b_1) \neq b_1$. Wende i) an mit Permutation $\tau^{-1}\sigma$. Wie in i) wiederholen wir die Abbildung immer wieder, bis wir wieder auf b_1 landen. Dies liefert den Zykel $\tau_2 = (b_1 \dots b_j)$. Da $\{1, \dots, n\}$ endlich ist, folgt induktiv, dass $\tau_s^{-1} \dots \tau_2^{-1}\tau_1^{-1}\sigma = \mathrm{id}$ ist. Also ist $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_s$ Produkt von disjunkten Zyklen.

iii) Für Aussage b) schreiben wir die Permutation σ zunächst als Produkt von disjunkten Zyklen, wie in a). Wir schreiben in diesem Produkt einen r-Zykel als Produkt von Transpositionen durch

$$(a_1 a_2 \dots a_r) = (a_1 a_r)(a_1 a_{r-1}) \dots (a_1 a_3)(a_1 a_2).$$

□

Definition 9.21. Eine Matrix in $M_n(K)$ heißt *Permutationsmatrix*, falls jede Zeile und jede Spalte jeweils genau einen Eintrag Eins hat und sonst Einträge Null hat.

Beispiel 9.22. Das sogenannte *Kronecker-delta* δ_{ij} ist definiert durch $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ und 0 sonst. Definiere für $\sigma \in S_n$ die Matrix $P_\sigma = (P_{ij})$ mit $P_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$. Beispielsweise für Permutation $\sigma = (12)$ und Permutation $\pi = (123)$ ist

$$P_\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\pi \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist P_σ eine Permutationsmatrix mit $P_\sigma = (e_{\sigma(1)} \mid \cdots \mid e_{\sigma(n)})$, denn die j-te Spalte von P_σ ist

$$\begin{pmatrix} P_{1j} \\ P_{2j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1\sigma(j)} \\ \delta_{2\sigma(j)} \\ \vdots \\ \delta_{n\sigma(j)} \end{pmatrix} = e_{\sigma(j)}.$$

Lemma 9.23. *Seien $\sigma, \pi \in S_n$, dann ist $P_\sigma P_\pi = P_{\sigma\pi}$.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} (P_\sigma P_\pi)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{ik} (P_\pi)_{kj} \\ &= \sum_k \delta_{i\sigma(k)} \cdot \delta_{k\pi(j)} \\ &\overset{k=\pi(j)}{=} \delta_{i,\sigma(\pi(j))} \\ &= (P_{\sigma\pi})_{ij}. \end{aligned}$$

□

Definition 9.24. Sei $\sigma \in S_n$. Definiere $\operatorname{sgn}(\sigma) := \det P_\sigma$, dass *Signum* beziehungsweise *Vorzeichen* der Permutation σ. Wir nennen σ gerade, falls $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ und ungerade, falls $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ ist.

Bemerkung 9.25. a) Die Abbildung $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ ist multiplikativ, also $\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\pi$. Dies folgt direkt daraus, dass wir das Signum über die Determinante definiert haben und wir bereits wissen, dass diese multiplikativ ist. Vergleiche dazu Theorem 9.7 und Lemma 9.23.

b) Sei $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$ Produkt von Transpositionen (siehe Theorem 9.20). Dann folgt induktiv, dass $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}(\tau_1 \dots \tau_s) = \operatorname{sgn}\tau_1 \dots \operatorname{sgn}\tau_s$. Wir können leicht nachrechnen, dass das Signum einer Transposition -1 ist. Damit folgt $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^s$.

Beispiel 9.26. Sei $A \in M_2(K)$. Berechne $\det A$ mittels der Eigenschaften D1) – D3) der Determinante und Bemerkung 9.5. Sei $e_1 = (1,0)^T$ und $e_2 = (0,1)^T$ die Standardbasis von K^2. Sei $A = (a_1 \mid a_2) = (a_{ij})$, dann ist

$$\begin{aligned}
\det A &= \det\Big(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \mid a_{12}e_1 + a_{22}e_2\Big) \\
&\overset{\text{D1)}}{=} a_{11}\det(e_1 \mid a_{12}e_1 + a_{22}e_2) + a_{21}\det(e_2 \mid a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\
&\overset{\text{D1)}}{=} a_{11}a_{12}\det(e_1 \mid e_1) + a_{11}a_{22}\det(e_1 \mid e_2) \\
&\quad + a_{21}a_{12}\det(e_2 \mid e_1) + a_{21}a_{22}\det(e_2 \mid e_2) \\
&\overset{\text{D2)}}{=} a_{11}a_{22}\det(e_1 \mid e_2) + a_{12}a_{21}\det(e_2 \mid e_1) \\
&\overset{9.5}{=} a_{11}a_{22}\det(e_1 \mid e_2) - a_{12}a_{21}\det(e_1 \mid e_2) \\
&\overset{\text{D3)}}{=} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21}.
\end{aligned}$$

Theorem 9.27 (Leibniz Formel)**.** *Sei $A \in M_n(K)$, dann ist*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Beweis. Mittels D1) – D3) und Bemerkung 9.5 gilt:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_n n}\det(e_{i_1} \mid e_{i_2} \mid \cdots \mid e_{i_n}) \\
&\overset{\text{D2)}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(n)n}\det(P_\sigma) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(n)n}.
\end{aligned}$$

□

Theorem 9.28 (Cramersche Regel)**.** *Sei $A \in M_n(K)$. Definiere $\widetilde{A} := (\widetilde{a_{ij}})$ mit $(\widetilde{a_{ij}}) := (-1)^{i+j}\det A^{ji}$. Dann gilt*

$$A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = (\det A) \cdot I_n.$$

Insbesondere gilt für eine invertierbare Matrix A, dass $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \widetilde{A}$ ist.

i) Wähle festes $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Sei $B := (b_{ij}) \in M_n(K)$ mit

$$B = (a_1 \mid \cdots \mid a_{l-1} \mid a_k \mid a_{l+1} \mid \cdots \mid a_k \mid \cdots \mid a_n),$$

das heisst, Matrix B entsteht aus Matrix A, indem wir die k-te Spalte von A in die l-te Spalte kopieren. Dann ist mit D2):

$$\det B = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ \det A & \text{falls } k = l. \end{cases}$$

ii) Berechne $\det B$ durch den Laplaceschen Entwickelungssatz nach der l-ten Spalte. Es ist $B^{il} = A^{il}$ und $b_{il} = a_{ik}$, für $1 \leq i \leq n$. Also

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} b_{il} \det B^{il} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+l} \det A^{il} \right) \cdot a_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a_{li}} a_{ik} = (\widetilde{A} \cdot A)_{lk}. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit i):

$$(\widetilde{A} \cdot A)_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ \det A & \text{falls } k = l. \end{cases}$$

und somit

$$\widetilde{A} \cdot A = \det A \cdot I_n.$$