Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 1

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 1 Skizzieren Sie folgende Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - (x+1)^2\}$

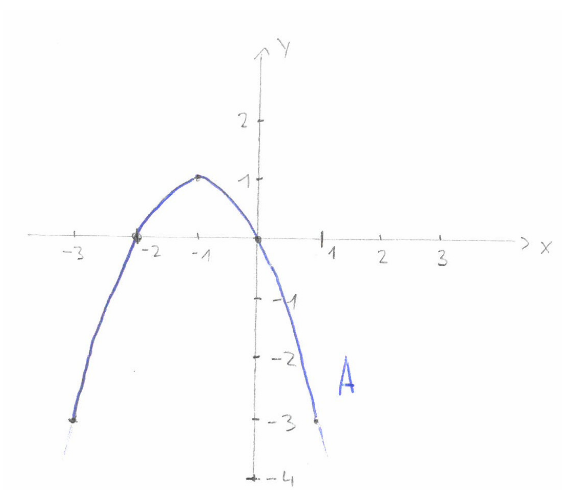
(b) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

(c) $C := (A \setminus B) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

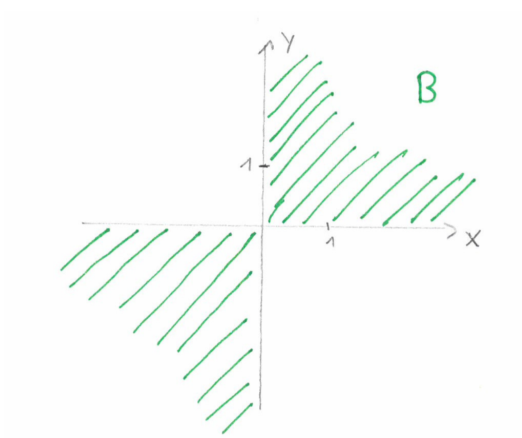
(d) $D := (A \setminus B) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Lösung.

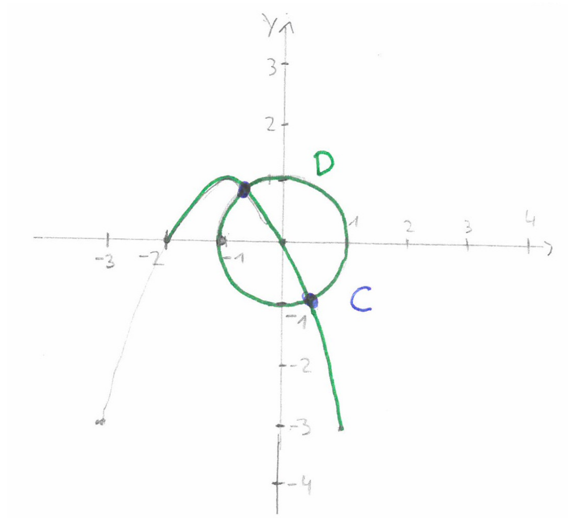
(a) Es ist A die nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel $(-1, 1)$.



(b) Es ist $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0) \wedge (y > 0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x < 0) \wedge (y < 0)\}$.



(c,d) Es ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ein Kreis mit Radius 1 um den Ursprung. Damit ergibt sich folgende Skizze für die Mengen C und D.



Hausaufgabe 2 Seien A, B und C Aussagen.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie unter Verwendung einer Wahrheitstafel:

$$\big(A \vee (B \wedge C)\big) \quad = \quad \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie unter Verwendung einer Wahrheitstafel:

$$\big((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \quad = \quad \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$$

Lösung.

(a) Wir stellen die Wahrheitstafel für $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
$B \wedge C$	w	f	f	f	w	f	f	f
$A \vee B$	w	w	w	w	w	w	f	f
$A \vee C$	w	w	w	w	w	f	w	f
$A \vee (B \wedge C)$	w	w	w	w	w	f	f	f
$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	w	w	w	w	w	f	f	f

Da die betreffenden Zeilen übereinstimmen, gilt also

$$\big(A \vee (B \wedge C)\big) \;=\; \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big).$$

(b) Wir stellen die Wahrheitstafel für $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ und $(A \wedge B) \Rightarrow C$ auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
$A \Rightarrow C$	w	f	w	f	w	w	w	w
$B \Rightarrow C$	w	f	w	w	w	f	w	w
$A \wedge B$	w	w	f	f	f	f	f	f
$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$	w	f	w	f	w	f	w	w
$(A \wedge B) \Rightarrow C$	w	f	w	w	w	w	w	w

Da die betreffenden Zeilen nicht übereinstimmen, gilt also nicht

$$\big((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \;=\; \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big).$$

Hausaufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ genau dann surjektiv ist, wenn sie injektiv ist.

(b) Finden Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(c) Finden Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Lösung.

(a) Sei $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ eine Abbildung. Dann gilt

$$|f^{-1}(\{1\})| + |f^{-1}(\{2\})| + |f^{-1}(\{3\})| \;=\; |\{1, 2, 3\}| = 3.$$

Ist f injektiv, so ist $|f^{-1}(\{i\})| \in \{0, 1\}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Um obige Gleichung zu erfüllen, muss dann aber $|f^{-1}(\{i\})| = 1$ sein für $i \in \{1, 2, 3\}$. Also ist f auch surjektiv.

Ist f surjektiv, so ist $|f^{-1}(\{i\})| \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Um obige Gleichung zu erfüllen, muss dann aber $|f^{-1}(\{i\})| = 1$ sein für $i \in \{1, 2, 3\}$. Also ist f auch injektiv.

Insgesamt ist f also genau dann surjektiv, wenn f injektiv ist.

(b) Wir definieren $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto f(n) := n + 1$.

Dann ist f injektiv, da für $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m) \;=\; f(n) \quad\Longleftrightarrow\quad m + 1 \;=\; n + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad m \;=\; n$$

gilt. Es ist f nicht surjektiv, da $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

(c) Wir definieren $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto f(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \\ n - 1 & n \geqslant 2. \end{cases}$

Dann ist f surjektiv, da $n + 1 \in f^{-1}(\{n\})$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es ist f nicht injektiv, da $f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\}$.

Hausaufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{3-2x}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

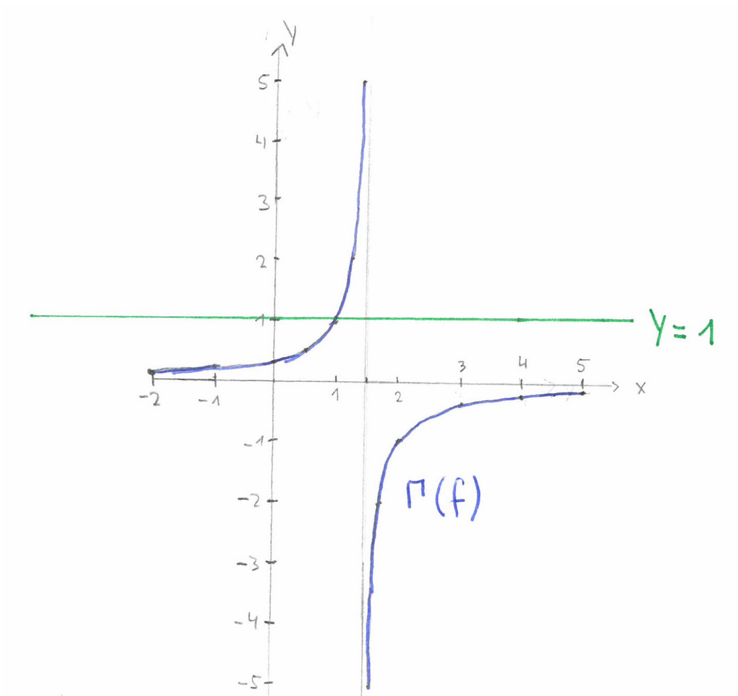
(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung f^{-1}.

(c) Berechnen Sie zur Probe $(f \circ f^{-1})(y)$ für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(f^{-1} \circ f)(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.

(d) Ist $f|_{\mathbb{R}_{<0}} : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ surjektiv? Begründen Sie dies anhand der Skizze und anhand einer Rechnung.

Lösung.

(a) Die folgende Skizze zeigt den Graphen von f.



(b) Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist

$$y = f(x) \iff y = \frac{1}{3-2x} \iff \frac{1}{y} = 3 - 2x \iff \frac{3}{2} - \frac{1}{2y} = x\,.$$

Also ist $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} : x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2x}$.

(c) Für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2y}\right) = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2y}\right)} = \frac{1}{3 - 3 + \frac{1}{y}} = y\,.$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ ist

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{3-2x}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3-2x}} = \frac{3}{2} - \frac{3-2x}{2} = \frac{3-3+2x}{2} = x\,.$$

(d) Es ist $f|_{\mathbb{R}_{<0}} : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ nicht surjektiv.

Begründung anhand der Skizze: Es schneidet z.B. die Gerade $y = 1$ den Graphen $\Gamma(f)$ nur im Punkt $(1, 1)$. Insbesondere schneidet die Gerade $y = 1$ den Graphen $\Gamma(f|_{\mathbb{R}_{<0}})$ nicht. Folglich liegt 1 zwar im Zielbereich $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, aber nicht im Bild $f|_{\mathbb{R}_{<0}}(\mathbb{R}_{<0})$.

Rechnerische Begründung: Z.B. ist $f^{-1}(1) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot 1} = 1\,.$

Also ist $(f|_{\mathbb{R}_{<0}})^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{1\}) \cap \mathbb{R}_{<0} = \{1\} \cap \mathbb{R}_{<0} = \emptyset$, enthält also nicht $\geqslant 1$ Elemente.