Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 2

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 5 Sei $P := \{M \subset \mathbb{N} : |M| = 3\}$. Gegeben ist eine Relation $(\lozenge)$ auf P. Untersuchen Sie $(\lozenge)$ auf Reflexivität, Symmetrie, Identitivität und Transitivität.

(a) $M \lozenge N \;:\Leftrightarrow\; (\exists\, n \in N\; \forall\, m \in M : m \leqslant n)$ für $M, N \in P$.

(b) $M \lozenge N \;:\Leftrightarrow\; |M \cap N| = 1$ für $M, N \in P$.

Lösung.

(a) *Reflexivität.* Sei $M \in P$. Sei n das maximale Element von M. Damit ist $m \leqslant n$ für alle $m \in M$. Also ist $M \lozenge M$ und $(\lozenge)$ ist reflexiv.

Symmetrie. Wir betrachten die Mengen $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{1, 3, 4\}$. Es ist $M \lozenge N$, da jedes Element von M kleiner als $4 \in N$ ist. Jedoch gilt nicht $N \lozenge M$, da es kein Element $m \in M$ gibt, mit $4 \leqslant m$. Also ist $(\lozenge)$ nicht symmetrisch.

Identitivität. Wir betrachten die Mengen $M := \{1, 3, 4\}$ und $N := \{2, 3, 4\}$. Da in beiden Mengen 4 das maximale Element ist, gilt $M \lozenge N$ und $N \lozenge M$. Die Mengen M und N sind jedoch nicht gleich. Also ist $(\lozenge)$ nicht identitiv.

Transitivität. Seien $L, M, N \in P$ mit $L \lozenge M$ und $M \lozenge N$. Also gibt es ein $m' \in M$ so, dass $l \leqslant m'$ für alle $l \in L$ gilt. Ebenso gibt es ein $n' \in N$ so, dass $m \leqslant n'$ für alle $m \in M$ gilt. Insbesondere haben wir $m' \leqslant n'$. Damit erhalten wir $l \leqslant m' \leqslant n'$ für alle $l \in L$. Also ist $L \lozenge N$ und $(\lozenge)$ ist transitiv.

(b) *Reflexivität.* Sei $M := \{1, 2, 3\}$. Es ist $|M \cap M| = |M| = 3$. Also ist $(\lozenge)$ nicht reflexiv.

Symmetrie. Der Schnitt zweier Mengen M, N ist symmetrisch. Es gilt

$$M \cap N = \{x : x \in M \wedge x \in N\} = N \cap M.$$

Also ist auch $(\lozenge)$ symmetrisch.

Identitivität. Wir betrachten die Mengen $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{3, 4, 5\}$. Es gilt $M \cap N = \{3\}$, also ist $M \lozenge N$ und $N \lozenge M$. Die Mengen M und N sind jedoch nicht gleich. Also ist $(\lozenge)$ nicht identitiv.

Transitivität. Wir betrachten die Mengen $L := \{1, 2, 3\}$, $M := \{3, 4, 5\}$ und $N := \{5, 6, 7\}$. Es gilt $L \cap M = \{3\}$ und $M \cap N = \{5\}$. Damit ist $L \lozenge M$ und $M \lozenge N$. Jedoch ist $L \cap N = \emptyset$. Also ist $(\lozenge)$ nicht transitiv.

Hausaufgabe 6

(a) Gegeben ist die folgende Abbildung.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 4 & \text{falls } x < 0 \\ (x^2 - 2)^2 & \text{falls } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Sei die Relation $(\sim)$ auf $\mathbb{R}$ definiert durch $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ für $x,\, y \in \mathbb{R}$.

Man zeige: Es ist $(\sim)$ eine Äquivalenzrelation.

Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[2]$.

(b) Gegeben ist auf $M := \{2, 3, 4, 5, 6\}$ die Relation $m \approx n :\Leftrightarrow m \in n\mathbb{Z}$ für $m, n \in M$. Sei $(\sim)$ die von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf M. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $(\sim)$ an.

Lösung.

(a) Wir zeigen dass $(\sim)$ eine Äquivalenzrelation ist.

Reflexivität. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(x)$ und also $x \sim x$.

Symmetrie. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt auch $f(y) = f(x)$ und damit ist $y \sim x$.

Transitivität. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Damit ist $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$. Insbesondere gilt $f(x) = f(z)$ und also $x \sim z$.

Wir bestimmen die Äquivalenzklasse $[2]$. Es ist $[2]$ die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(2)$, wobei $f(2) = 4$. Die Gleichung $(x^2 - 2)^2 = 4$ ergibt für $x \geqslant 0$ die Lösungen 0 und 2. Für alle $x < 0$ ist $f(x) = 4$. Damit erhalten wir

$$[2] = \,]-\infty,\, 0[\, \cup \{0,\, 2\} = \,]-\infty,\, 0] \cup \{2\}.$$

(b) Als ersten Schritt wollen wir die von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation beschreiben. Dazu stellen wir zuerst die Relation $(\approx)$ in einer Tafel dar.

$(\approx)$	2	3	4	5	6
2	$\times$				
3		$\times$			
4	$\times$		$\times$		
5				$\times$	
6	$\times$	$\times$			$\times$

Die Relation $(\approx)$ ist bereits reflexiv. Wir bilden eine reflexive und symmetrische Relation S durch Hinzunahme aller Paare $(n, m) \in M \times M$, für die $m \approx n$ gilt. Dann ist $S \subseteq (\sim)$.

S	2	3	4	5	6
2	$\times$		$\times$		$\times$
3		$\times$			$\times$
4	$\times$		$\times$		
5				$\times$	
6	$\times$	$\times$			$\times$

Wir nutzen aus, dass $(\sim)$ transitiv ist. Wegen $S \subseteq (\sim)$ ist mit $2S6$ und $6S3$ auch $2 \sim 3$. Nach Symmetrie auch $3 \sim 2$. Ebenso erhalten wir mit $6S2S4$ auch $6 \sim 4$, sowie $4 \sim 6$. Schließlich wird mit $3S6S2S4$ auch $3 \sim 4$, sowie $4 \sim 3$. Durch Hinzunahme dieser Paare erhalten wir die folgende Relation $(\hat{\sim})$.

$(\hat{\sim})$	2	3	4	5	6
2	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
3	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
4	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
5				$\times$	
6	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$

Nun ist $(\hat{\sim})$ eine Äquivalenzrelation. Diese enthält $(\approx)$. Also ist $(\sim) \subseteq (\hat{\sim})$.

Nach Konstruktion ist sowieso $(\hat{\sim}) \subseteq (\sim)$.

Also ist $(\hat{\sim}) = (\sim)$ die gesuchte von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation.

Aus der Tabelle lesen wir die Äquivalenzklassen von $(\sim) = (\hat{\sim})$ ab.

$$[2] = \{2, 3, 4, 6\}$$
$$[5] = \{5\}$$

Hausaufgabe 7

(a) Zeigen Sie, dass $n^2 \geqslant 4n - 2$ ist für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 4}$.

(b) Finden Sie das minimale $s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$, für welches die Aussage $2^s > s^2$ gilt.
Zeigen Sie die Aussage $2^n > n^2$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant s}$.

Lösung.

(a) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 4}$. Wir zeigen $n^2 - 4n + 2 \geqslant 0$. Es gilt

$$n^2 - 4n + 2 = (n-2)^2 - 2.$$

Es genügt also $(n-2)^2 \geqslant 2$ zu zeigen. Wegen $n \geqslant 4$ ist $(n-2) \geqslant 2$. Also ist

$$(n-2)^2 = (n-2) \cdot (n-2) \geqslant 2 \cdot (n-2) \geqslant 2 \cdot 2 > 2.$$

Bemerkung. Diese Ungleichung hätte man ebenso mit dem speziellen Induktionsprinzip zeigen können.

(b) Ausprobieren ergibt, dass die Ungleichung für $s = 5$ gilt. Wir rechnen nach, dass dieses s minimal ist.

$$\begin{aligned}
2^2 &= 4 = 2^2 \\
2^3 &= 8 < 9 = 3^2 \\
2^4 &= 16 = 4^2 \\
2^5 &= 32 > 25 = 5^2
\end{aligned}$$

Wir zeigen die Aussage $2^n > n^2$ mit dem speziellen Induktionsprinzip über $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 5}$.

Induktionsanfang. Für $n = 5$ gilt wie oben $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 6$. Als Induktionsvoraussetzung dürfen wir $2^{n-1} > (n-1)^2$ verwenden. Daraus müssen wir $2^n > n^2$ folgern. Dazu wollen wir Teil (a) verwenden. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
2^n &= 2 \cdot 2^{n-1} \\
&\overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot (n-1)^2 \\
&= 2n^2 - 4n + 2 \\
&= n^2 + n^2 - 4n + 2 \\
&\overset{(a)}{\geqslant} n^2 + 0 \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 8 Sei $M := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m < n\}$.

(a) Skizzieren Sie M als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) Für $(m,n) \in M$ schreiben wir

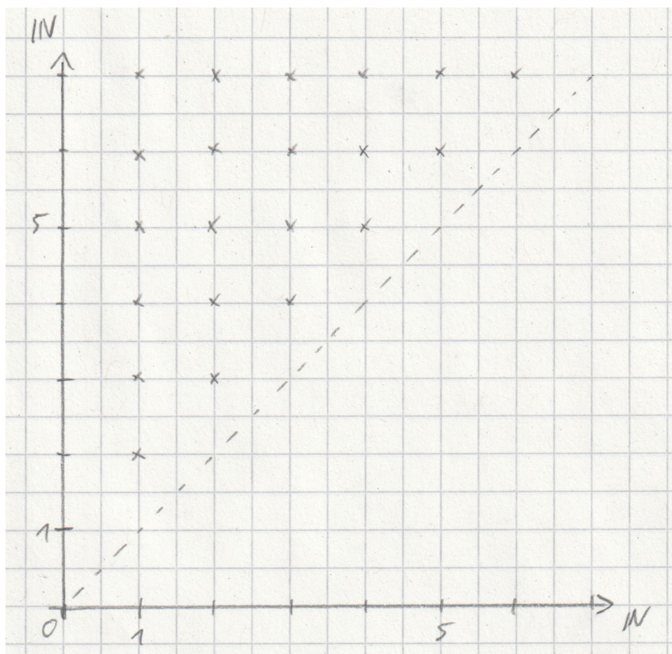
$$f(m,n) \;:=\; (2m+1) + (2m+3) + \ldots + (2(n-1)+1) \;=\; \sum_{k=m}^{n-1} (2k+1).$$

Zeigen Sie die Aussage $f(m,n) = n^2 - m^2$ für alle $(m,n) \in M$.

Hinweis: Dazu kann sowohl das spezielle als auch das allgemeine Induktionsprinzip verwendet werden.

Lösung.

(a) Die Menge M ist in der folgenden Skizze durch kleine Kreuze dargestellt.



(b) Wir zeigen die Aussage mit dem speziellen Induktionsprinzip.

Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wollen $f(m,n) \overset{!}{=} n^2 - m^2$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant m+1}$ mit Induktion zeigen.

Induktionsanfang. Es ist $f(m,m+1) = 2m+1$. Ebenso ist $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

Induktionsschritt. Sei $n > m+1$. Als Induktionsvoraussetzung dürfen wir verwenden, dass $f(m,n-1) = (n-1)^2 - m^2$ gilt. Daraus müssen wir $f(m,n) = n^2 - m^2$ folgern. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} f(m,n) &= f(m,n-1) + 2n - 1 \\ &\overset{\text{IV}}{=} (n-1)^2 - m^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 - 2n + 1 - m^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 - m^2. \end{aligned}$$

Da wir $m \in \mathbb{N}$ beliebig vorgeben können, gilt die Aussage insgesamt für alle $(m,n) \in M$.

Alternative, bei Interesse. Ebenso kann man diese Aussage auch mit dem allgemeinen Induktionsprinzip zeigen.

Wir führen eine Induktion über die induktiv geordnete Menge $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sei $(m, n) \in M$ gegeben. Als Induktionsvoraussetzung können wir $\sum_{k=s}^{t-1}(2k+1) = s^2 - t^2$ für alle $(s, t) \in M$ mit $(s, t) < (m, n)$ verwenden.

Fall $n = m + 1$. Es ist $f(m, m+1) = 2m + 1 = (m+1)^2 - m^2$.

Fall $n > m + 1$. Es ist $n - 1 > m$ und damit $(m, n-1) \in M$ mit $(m, n-1) < (m, n)$. Wir können also die Induktionsvoraussetzung für $(m, n-1)$ verwenden. Es wird

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n-1}(2k+1) &= \sum_{k=m}^{n-2}(2k+1) + 2n - 1 \\
&\overset{\text{IV}}{=} (n-1)^2 - m^2 + 2n - 1 \\
&= n^2 - 2n + 1 - m^2 + 2n - 1 \\
&= n^2 - m^2.
\end{aligned}$$

Kommentar. Die benötigte Rechnung ist hier bei beiden Vorgehensweisen, speziell und allgemein, also dieselbe. Aus den zwei Schritten "Induktionsanfang" und "Induktionsschritt" bei Verwendung des speziellen Induktionsprinzips wird bei Anwendung des allgemeinen Induktionsprinzips eine Fallunterscheidung.