Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 3

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 9 Sei $f : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} f(0) & := & 0 \\ f(z) & := & f(z-1) + 3z^2 - 3z + 1 \quad \text{für } z \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}\,. \end{array}$$

(a) Berechnen Sie $f(k)$ für $0 \leqslant k \leqslant 4$.

(b) Finden Sie eine nicht-rekursive Formel für $f(z)$ für $z \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.
Zeigen Sie diese mit Induktion.

Lösung.

(a) Es ist $f(0) = 0$. Wir rechnen.

$$\begin{array}{rcccccl} f(1) & = & f(0) + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 & = & 0 + 3 - 3 + 1 & = & 1 \\ f(2) & = & f(1) + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 & = & 1 + 12 - 6 + 1 & = & 8 \\ f(3) & = & f(2) + 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 & = & 8 + 27 - 9 + 1 & = & 27 \\ f(4) & = & f(3) + 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 & = & 27 + 48 - 12 + 1 & = & 64 \end{array}$$

(b) Aus (a) erhalten wir $f(k) = k^3$ für $0 \leqslant k \leqslant 4$.

Wir zeigen die Aussage $f(z) = z^3$ mit dem speziellen Induktionsprinzip über $z \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Induktionsanfang. Für $z = 0$ gilt $f(z) = 0 = 0^3$.

Induktionsschritt. Sei $z \geqslant 1$. Als Induktionsvoraussetzung dürfen wir $f(z-1) = (z-1)^3$ verwenden. Daraus müssen wir $f(z) = z^3$ folgern.

In der Tat gilt

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & f(z-1) + 3z^2 - 3z + 1 \\ & \overset{\text{IV}}{=} & (z-1)^3 + 3z^2 - 3z + 1 \\ & = & z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 3z^2 - 3z + 1 \\ & = & z^3\,. \end{array}$$

Hausaufgabe 10

(a) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(2k+3)^2 - 4(2k+1)^2}{4^{k+1}}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von

$$33 \cdot \operatorname{ggT}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 90^k (-13)^{2n-k}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 229^k 266^{n-k}\right).$$

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{(2k+3)^2 - 4(2k+1)^2}{4^{k+1}} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{(2(k+1)+1)^2}{4^{k+1}} - \frac{(2k+1)^2}{4^k} \right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{(2(k+1)+1)^2}{4^{k+1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{(2k+1)^2}{4^k} \\
&= \sum_{k=3}^{n+1} \frac{(2k+1)^2}{4^k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{(2k+1)^2}{4^k} \\
&= \frac{(2(n+1)+1)^2}{4^{n+1}} - \frac{(2 \cdot 2+1)^2}{4^2} \\
&= \frac{(2n+3)^2}{4^{n+1}} - \frac{25}{16} .
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
& 33 \cdot \operatorname{ggT}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 90^k (-13)^{2n-k}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 229^k 266^{n-k}\right) \\
= \; & 33 \cdot \operatorname{ggT}((90-13)^{2n}, (229+266)^n) \\
= \; & 33 \cdot \operatorname{ggT}(77^{2n}, 495^n) \\
= \; & 33 \cdot \operatorname{ggT}(7^{2n} \cdot 11^{2n}, 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 11^n) \\
= \; & 3 \cdot 11 \cdot 11^n \\
= \; & 3 \cdot 11^{n+1} .
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 11

(a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(7128, 7623)$ mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus.
Finden Sie $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(7128, 7623) = s \cdot 7128 + t \cdot 7623$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(7128, 7623)$ mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

(c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $\mathrm{ggT}(\binom{113}{3}, \binom{113}{4})$.

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned} 7623 &= 1 \cdot 7128 + 495 \\ 7128 &= 14 \cdot 495 + 198 \\ 495 &= 2 \cdot 198 + 99 \\ 198 &= 2 \cdot 99 + 0\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(7128, 7623) = 99 &= 495 - 2 \cdot 198 \\ &= 495 - 2 \cdot (7128 - 14 \cdot 495) \\ &= (-2) \cdot 7128 + 29 \cdot 495 \\ &= (-2) \cdot 7128 + 29 \cdot (7623 - 1 \cdot 7128) \\ &= 29 \cdot 7623 - 31 \cdot 7128\,. \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen die Primfaktorzerlegung von 7128.

$$7128 = 2 \cdot 3564 = 2^2 \cdot 1782 = 2^3 \cdot 891 = 2^3 \cdot 9 \cdot 99 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 11$$

Wir berechnen die Primfaktorzerlegung von 7623.

$$\begin{aligned} 7623 &= 6000 + 1500 + 120 + 3 &&= 3 \cdot 2541 \\ &= 3 \cdot (2400 + 120 + 21) &&= 3^2 \cdot 847 \\ &= 3^2 \cdot (700 + 140 + 7) &&= 3^2 \cdot 7 \cdot 121 \\ &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(7128, 7623) = \mathrm{ggT}(2^3 \cdot 3^4 \cdot 11, 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2) = 3^2 \cdot 11 = 99\,$.

(c) Wir rechnen.

$$\binom{113}{3} = \frac{113 \cdot 112 \cdot 111}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 113 \cdot 56 \cdot 37 = 113 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 2^3$$

$$\binom{113}{4} = \frac{113 \cdot 112 \cdot 111 \cdot 110}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 113 \cdot 28 \cdot 37 \cdot 55 = 113 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2^2$$

Es ist 113 nicht durch die Primzahlen $2, 3, 5$ und 7 teilbar.

Annahme, 113 hat einen Primfaktor $11 \leqslant p < 113$. Dann ist $113 = p \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Dabei ist $n < 11$, denn sonst wäre $113 = p \cdot n \geqslant 11 \cdot 11 = 121$. Also hat n einen Primfaktor $q < 11$. Damit ist dann aber $113 = p \cdot n$ durch $2, 3, 5$ oder 7 teilbar. *Widerspruch.*

Also ist 113 eine Primzahl, und wir erhalten die Primfaktorzerlegung

$$\mathrm{ggT}(\binom{113}{3}, \binom{113}{4}) = \mathrm{ggT}(113 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 2^3, 113 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2^2) = 113 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 2^2 .$$

Bemerkung. Es wäre langwierig, $113 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 2^2 = 117068 = 2^2 \cdot 7 \cdot 4181$ direkt zu faktorisieren.

Hausaufgabe 12 Gegeben sind $a := 1315$ und $b := 526$.

(a) Schreiben Sie a und b in Binärdarstellung und in Hexadezimaldarstellung.

(b) Schreiben Sie $a + b$ in Binärdarstellung und $a - b$ in Hexadezimaldarstellung.

(c) Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungungen von a, b und $\mathrm{ggT}(a, b)$.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$\begin{array}{rcccl} 1315 & = & 1024 + 291 & = & 2^{10} + 291 \\ 291 & = & 256 + 35 & = & 2^8 + 35 \\ 35 & = & 32 + 3 & = & 2^5 + 3 \\ 3 & = & 2 + 1 & = & 2^1 + 2^0 \end{array}$$

Also ist

$$\begin{array}{rcccl} 1315 & = & 2^{10} + 2^8 + 2^5 + 2^1 + 2^0 & = & 10100100011_2 \\ & = & (4+1) \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + (2+1) \cdot 16^0 & = & 523_{16} \end{array}$$

Wir rechnen.

$$\begin{array}{rcccl} 526 & = & 512 + 14 & = & 2^9 + 14 \\ 14 & = & 8 + 4 + 2 & = & 2^3 + 2^2 + 2^1 \end{array}$$

Also ist

$$\begin{array}{rcccl} 526 & = & 2^9 + 2^3 + 2^2 + 2^1 & = & 1000001110_2 \\ & = & 2 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 & = & 20\mathrm{E}_{16} \end{array}$$

(b) Wir addieren a und b in der Binärdarstellung.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Also ist $a + b = 11100110001_2$.

Wir subtrahieren b von a in Hexadezimaldarstellung.

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 2 & 3 \\ - & 2 & 0 & \mathrm{E} \\ & & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

Also ist $a - b = 315_{16}$.

Alternativ hätte man auch $a+b$ und $a-b$ in Dezimaldarstellung berechnen können, um dann das Ergebnis in die gewünschte Darstellung umzurechnen.

(c) Es ist $1315 = 5 \cdot 263$ und $526 = 2 \cdot 263$.

Es ist 263 nicht durch die Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11$ und 13 teilbar.

Annahme, 263 hat einen Primfaktor $17 \leqslant p < 263$. Dann ist $263 = p \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Dabei ist $n < 17$, denn sonst wäre $263 = p \cdot n \geqslant 17 \cdot 17 = 289$. Also hat n einen Primfaktor $q < 17$. Damit ist dann aber $263 = p \cdot n$ durch $2, 3, 5, 7, 11$ oder 13 teilbar. *Widerspruch.*

Also ist 263 eine Primzahl, und wir erhalten folgende Primfaktorzerlegungen.

$$\begin{array}{rcccl} a & = & 1315 & = & 5 \cdot 263 \\ b & = & 526 & = & 2 \cdot 263 \\ \mathrm{ggT}(a, b) & = & 263 & = & 263 \end{array}$$

Letztere Zerlegung besteht nur aus dem einen Faktor 263.