Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 4

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 13 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{ (a, b) \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \,:\, a \cdot b = 1 \}$

(b) $B := \{ (a, b) \in \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \,:\, a \cdot b = 1 \}$

(c) $C := \{ a \in \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \,:\, \exists\, b \in (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}) \setminus \{0\} \text{ mit } a \cdot b = 0 \}$

(d) $D := \{ (a, b) \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \,:\, (a + b)^5 = a^2 \}$

Lösung.

(a) Nach dem letzen Lemma aus §2.3 im Skript ist $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ ein Körper. Daher gibt es für $a \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ genau ein $b \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ mit $(a, b) \in A$.

Eine direkte Rechnung ergibt folgendes Ergebnis.

$$A = \{(1, 1),\ (2, 6),\ (3, 4),\ (4, 3),\ (5, 9),\ (6, 2),\ (7, 8)\ (8, 7),\ (9, 5),\ (10, 10)\}$$

(b) und (c) Sei $(a, b) \in B$, also $a \cdot b = 1$. Dann kann a nicht auch ein Element aus C sein und umgekehrt. Denn wenn $a \cdot c = 0$ für ein $c \in \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$, so ist $0 \cdot b = a \cdot c \cdot b = a \cdot b \cdot c = 1 \cdot c = c$.

Das Produkt von 7 mit einer geraden Zahl ist durch 14 teilbar. Also ist

$$\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 12\} \subseteq C \text{ und } B \subseteq \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13\} \times \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13\}.$$

Eine direkte Rechnung ergibt nun

$$\begin{aligned} B &= \{(1, 1),\ (3, 5),\ (5, 3),\ (9, 11),\ (11, 9),\ (13, 13)\} \\ C &= \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 12\}. \end{aligned}$$

(d) Eine direkte Rechnung ergibt $x^5 = x$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und also $(a + b)^5 = a + b$ für $a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Damit muss für $(a, b) \in D$ folgendes gelten.

$$b = a^2 - a$$

Einsetzen von $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ergibt $D = \{(0, 0),\ (1, 0),\ (2, 2),\ (3, 1),\ (4, 2)\}$.

Hausaufgabe 14 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{ x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \,:\, x^3 + 2x + 1 = 0 \}$

(b) $B := \{ x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \,:\, x^3 + 2x + 1 = 0 \}$

(c) $C := \{ x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \,:\, x^3 + x + 2 = 0 \}$

(d) $D := \{ x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \,:\, x^3 + x^2 + x = 0 \}$

Lösung.

(a) Für $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ erhalten wir folgende Werte für $x^3 + 2x + 1$.

x	$x^3 + 2x + 1$
0	1
1	0
2	1
3	2

Damit ist $A = \{1\}$.

(b) Für $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ erhalten wir folgende Werte für $x^3 + 2x + 1$.

x	$x^3 + 2x + 1$
0	1
1	4
2	3
3	4
4	3

Damit ist $B = \emptyset$.

(c) Für $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ erhalten wir folgende Werte für $x^3 + x + 2$.

x	$x^3 + x + 2$
0	2
1	4
2	0
3	2
4	4
5	0

Damit ist $C = \{2, 5\}$.

(d) Für $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ erhalten wir folgende Werte für $x^3 + x^2 + x$.

x	$x^3 + x^2 + x$
0	0
1	3
2	0
3	4
4	0
5	1
6	6

Damit ist $D = \{0, 2, 4\}$.

Alternative. Manchmal kann es vorteilhaft sein, die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ anders zu schreiben, um Rechnungen mit größeren ganzen Zahlen zu vermeiden.

Für Teil (d) können wir etwa auch $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ schreiben. Damit erhalten wir folgende Wertetabelle.

x	$x^3 + x^2 + x$
-3	0
-2	1
-1	-1
0	0
1	3
2	0
3	-3

Damit ist ebenfalls $D = \{-3, 0, 2\}$.

Hausaufgabe 15 Gegeben sind die Polynome $f(X) := X^5 + 4X$, $g(X) := X^5 + X$ und $h(X) := X^6 + X^5 - X^2 - X$ in $\mathbb{F}_5[X]$.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f(X)$, $g(X)$ und $h(X)$ in $\mathbb{F}_5$.

(b) Finden Sie Polynome $u(X), v(X) \in \mathbb{F}_5[X]$, für welche $u(X) \neq v(X)$ ist und für welche $u(x) = v(x) \neq 0$ ist für $x \in \mathbb{F}_5$.

Lösung.

(a) Eine direkte Rechnung ergibt $x^5 = x$ für $x \in \mathbb{F}_5$. Damit ist für $x \in \mathbb{F}_5$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^5 + 4x = 5x = 0 \\
g(x) &= x^5 + x = x + x = 2x \\
h(x) &= x^6 + x^5 - x^2 - x = x \cdot x + x - x^2 - x = 0.
\end{aligned}
$$

Also sind $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Nullstellen von $f(X)$ und $h(X)$, sowie $\{0\}$ die einzige Nullstelle von $g(X)$.

(b) Wir wählen $u(X) := 1$ und $v(X) := u(X) + f(X) = X^5 - X + 1$.

Die Koeffizienten bei X^1 sind verschieden, also ist $u(X) \neq v(X)$.

Für alle $x \in \mathbb{F}_5$ gilt $u(x) = 1 = 1 + 0 = v(x) \neq 0$. Also ist auch die zweite Bedingung erfüllt.

Hausaufgabe 16 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{\, \sigma \in \mathrm{S}_4 \;:\; \sigma^2 = \mathrm{id} \,\wedge\, \sigma(1) = 2 \,\}$

(b) $B := \{\, \sigma \in \mathrm{S}_4 \;:\; \sigma^3 = \mathrm{id} \,\wedge\, \sigma(1) = 2 \,\}$

Lösung. Wir sammeln zuerst alle Elemente $\sigma \in \mathrm{S}_4$, für die $\sigma(1) = 2$ gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen für diese Elemente $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$ und $\sigma^3 = \sigma \circ \sigma^2$.

σ	σ^2	σ^3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Also ist

$$A = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\}$$

und

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\}.$$