Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 5

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 17

(a) Berechnen Sie $\dfrac{7-3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} + (3-2\mathrm{i})^2$ in $\mathbb{C}$.

(b) Seien

$$
\begin{aligned}
f(X) &:= X^5 + X^4 - (3+3\mathrm{i})X^3 + (2+\mathrm{i})X^2 + 2X \\
g(X) &:= X^3 - (2+\mathrm{i})X^2 - X + 1
\end{aligned}
$$

in $\mathbb{C}[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $h(X)$, $r(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ und mit

$$
f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X) \; .
$$

Lösung.

(a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{7-3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} + (3-2\mathrm{i})^2 &= \frac{(7-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} + (3^2 - 12\mathrm{i} + (-2\mathrm{i})^2) \\
&= \frac{7+18\mathrm{i}-9\mathrm{i}^2}{1-9\mathrm{i}^2} + (5-12\mathrm{i}) \\
&= \frac{16+18\mathrm{i}}{10} + (5-12\mathrm{i}) \\
&= \frac{8+9\mathrm{i}}{5} + \frac{25-60\mathrm{i}}{5} \\
&= \frac{33-51\mathrm{i}}{5} \; .
\end{aligned}
$$

(b) Wir führen folgende Polynomdivision in $\mathbb{C}[X]$ durch.

$$
\begin{array}{llllll}
X^5 & +X^4 & -(3+3\mathrm{i})X^3 & +(2+\mathrm{i})X^2 & +2X & \\
-(X^5 & -(2+\mathrm{i})X^4 & -X^3 & +X^2) & & \\
\hline
 & (3+\mathrm{i})X^4 & -(2+3\mathrm{i})X^3 & +(1+\mathrm{i})X^2 & +2X & \\
 & -((3+\mathrm{i})X^4) & -(5+5\mathrm{i})X^3 & -(3+\mathrm{i})X^2 & +(3+\mathrm{i})X) & \\
\hline
 & & (3+2\mathrm{i})X^3 & +(4+2\mathrm{i})X^2 & -(1+\mathrm{i})X & \\
 & & -((3+2\mathrm{i})X^3 & -(4+7\mathrm{i})X^2 & -(3+2\mathrm{i})X & +(3+2\mathrm{i})) \\
\hline
 & & & (8+9\mathrm{i})X^2 & +(2+\mathrm{i})X & -(3+2\mathrm{i})
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (X^3 - (2+\mathrm{i})X^2 - X + 1) \\
&\quad \cdot (X^2 + (3+\mathrm{i})X + (3+2\mathrm{i})) \\
&\quad + ((8+9\mathrm{i})X^2 + (2+\mathrm{i})X - (3+2\mathrm{i}))
\end{aligned}
$$

Also gilt $h(X) = X^2 + (3+\mathrm{i})X + (3+2\mathrm{i})$ und $r(X) = (8+9\mathrm{i})X^2 + (2+\mathrm{i})X - (3+2\mathrm{i})$.

Hausaufgabe 18

(a) Berechnen Sie $\left(\frac{1-\iota}{1+\iota}+\frac{\iota}{1-\iota}\right)^5$ in $\mathbb{F}_9$.

(b) Seien

$$\begin{aligned} f(X) &:= X^6 - \iota \\ g(X) &:= X^2 + \iota \end{aligned}$$

in $\mathbb{F}_9[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $h(X)$, $r(X) \in \mathbb{F}_9[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ und mit

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X) \ .$$

Lösung.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\iota}{1+\iota}+\frac{\iota}{1-\iota}\right)^5 &= \left(\frac{(1-\iota)(1-\iota)+\iota(1+\iota)}{(1+\iota)(1-\iota)}\right)^5 \\ &= \left(\frac{1+\iota+\iota^2+\iota+\iota^2}{1-\iota^2}\right)^5 \\ &= \left(\frac{-1-\iota}{-1}\right)^5 \\ &= (1+\iota)^5 \\ &= ((1+\iota)^2)^2 \cdot (1+\iota) \\ &= (-\iota)^2 \cdot (1+\iota) \\ &= -1-\iota \,. \end{aligned}$$

(b) Wir führen folgende Polynomdivision in $\mathbb{F}_9[X]$ durch.

$$\begin{array}{ccccl} X^6 & & & -\iota & = (X^2+\iota)\cdot(X^4-\iota X^2-1) \\ -(X^6 & +\iota X^4) & & & \\ \hline & -\iota X^4 & & & \\ & -(-\iota X^4 & +X^2) & & \\ \hline & & -X^2 & -\iota & \\ & & -(-X^2 & -\iota) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Also gilt $h(X) = X^4 - \iota X^2 - 1$ und $r(X) = 0$.

Hausaufgabe 19

(a) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $f(X) \in \mathbb{F}_4[X]$ mit $\deg(f(X)) = 2$.

(b) Entscheiden Sie, ob $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_4[X]$ irreduzibel ist.

Entscheiden Sie, ob $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist.

Lösung.

(a) Ein normiertes Polynom von Grad 2 in $\mathbb{F}_4[X]$ hat die Form

$$f(X) = X^2 + sX + t$$

mit $s, t \in \mathbb{F}_4$.

Ist $t = 0$, so ist 0 eine Nullstelle von $f(X)$ und $f(X)$ somit nicht irreduzibel.

Für $s = 0$, $t \in \mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$ erhalten wir die Polynome

$$\begin{array}{rcll} f(X) & = & X^2 + 1 & \text{mit Nullstelle } 1, \\ f(X) & = & X^2 + \alpha & \text{mit Nullstelle } \alpha + 1, \\ f(X) & = & X^2 + \alpha + 1 & \text{mit Nullstelle } \alpha. \end{array}$$

Für $s = 1$, $t \in \mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$ erhalten wir die Polynome

$$\begin{array}{rcll} f(X) & = & X^2 + X + 1 & \text{mit Nullstellen } \alpha \text{ und } \alpha + 1, \\ f(X) & = & X^2 + X + \alpha & \text{ohne Nullstellen}, \\ f(X) & = & X^2 + X + \alpha + 1 & \text{ohne Nullstellen}. \end{array}$$

Für $s = \alpha$, $t \in \mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$ erhalten wir die Polynome

$$\begin{array}{rcll} f(X) & = & X^2 + \alpha X + 1 & \text{ohne Nullstellen}, \\ f(X) & = & X^2 + \alpha X + \alpha & \text{ohne Nullstellen}, \\ f(X) & = & X^2 + \alpha X + \alpha + 1 & \text{mit Nullstellen } 1 \text{ und } \alpha + 1. \end{array}$$

Für $s = \alpha + 1$, $t \in \mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$ erhalten wir die Polynome

$$\begin{array}{rcll} f(X) & = & X^2 + (\alpha + 1)X + 1 & \text{ohne Nullstellen}, \\ f(X) & = & X^2 + (\alpha + 1)X + \alpha & \text{mit Nullstellen } 1 \text{ und } \alpha, \\ f(X) & = & X^2 + (\alpha + 1)X + \alpha + 1 & \text{ohne Nullstellen}. \end{array}$$

Normierte Polynome von Grad 2 ohne Nullstelle sind irreduzibel. Insgesamt sind also

$$\begin{array}{ll} X^2 + X + \alpha & X^2 + X + \alpha + 1 \\ X^2 + \alpha X + 1 & X^2 + \alpha X + \alpha \\ X^2 + (\alpha + 1)X + 1 & X^2 + (\alpha + 1)X + \alpha + 1 \end{array}$$

die irreduziblen Polynome von Grad 2 in $\mathbb{F}_4[X]$.

Alternativ kann man auch alle Produkte von zwei normierten Polynomen von Grad 1 bilden und diese aus der Liste der normierten Polynome von Grad 2 streichen. Die verbleibenden Polynome bilden dann die Liste der irreduziblen Polynome von Grad 2.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} 0^4+0+1 &= 1 \\ 1^4+1+1 &= 1 \\ \alpha^4+\alpha+1 &= (\alpha+1)^2+\alpha+1 \;=\; \alpha+\alpha+1 \;=\; 1 \\ (\alpha+1)^4+(\alpha+1)+1 &= \alpha^2+\alpha \;=\; \alpha+1+\alpha \;=\; 1\,. \end{aligned}$$

Also hat X^4+X+1 keine Nullstellen in $\mathbb{F}_4$ und kann damit in $\mathbb{F}_4[X]$ nicht als Produkt

$$X^4+X+1 \;=\; g(X)\cdot h(X)$$

mit $\deg(g(X))=1$ und $\deg(h(X))=3$ geschrieben werden. Dies ist in $\mathbb{F}_2[X]$ dann erst recht unmöglich, da $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_4$.

Wir untersuchen, ob X^4+X+1 in $\mathbb{F}_4[X]$ als Produkt

$$X^4+X+1 \;=\; g(X)\cdot h(X)$$

mit $\deg(g(X))=2=\deg(h(X))$ geschrieben werden kann.

Es genügt zu untersuchen, ob X^4+X^2+1 ohne Rest durch ein normiertes Polynom

$$g(X) = X^2+sX+t$$

mit $s,t\in\mathbb{F}_4$ teilbar ist.

Dazu führen wir folgende Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{llllll} X^4 & & & +X & +1 & = (X^2+sX+t)\cdot(X^2+sX+(s^2+t)) \\ -(X^4 & +\,sX^3 & +tX^2) & & & \quad +(1+s^3)X+(t^2+s^2t+1) \\ \hline & sX^3 & +tX^2 & +X & & \\ & -(sX^3 & +s^2X^2 & +stX) & & \\ \hline & & (s^2+t)X^2 & +(1+st)X & +1 & \\ & & -((s^2+t)X^2 & +(st+s^3)X & +(t^2+s^2t)) & \\ \hline & & & (1+s^3)X & +(t^2+s^2t+1) & \end{array}$$

Es ergibt sich also der Rest $r(X) := (1+s^3)X+(t^2+s^2t+1)\in\mathbb{F}_4[X]$.

Die Bedingung $r(X)\overset{!}{=}0$ führt via Koeffizientenvergleich auf die folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned} 1+s^3 &\overset{!}{=} 0 \\ t^2+s^2t+1 &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung hat die Lösungen $s=1$, $s=\alpha$ und $s=\alpha+1$.

Fall $s=1$. Die zweite Gleichung wird zu

$$t^2+t+1\overset{!}{=}0$$

mit Lösungen $t = \alpha$ und $t = \alpha + 1$ in $\mathbb{F}_4$ und ohne Lösungen in $\mathbb{F}_2$.

Fall $s = \alpha$. Die zweite Gleichung wird zu

$$t^2 + (\alpha + 1)t + 1 \overset{!}{=} 0 ,$$

ohne Lösungen in $\mathbb{F}_4$; vgl. (a).

Fall $s = \alpha + 1$. Die zweite Gleichung wird zu

$$t^2 + \alpha t + 1 \overset{!}{=} 0 ,$$

ohne Lösungen in $\mathbb{F}_4$; vgl. (a).

Insgesamt ist also

$$X^4 + X + 1 = (X^2 + X + \alpha)(X^2 + X + (\alpha + 1)) \in \mathbb{F}_4[X]$$

nicht irreduzibel, aber

$$X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$$

irreduzibel.

Hausaufgabe 20 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{x \in \mathbb{F}_4 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{F}_8^2 : x \cdot y = 1\}$

(d) $D := \{x \in \mathbb{F}_9 : x^3 \neq x\}$

Lösung.

(a) Wir rechnen in $\mathbb{F}_4$.

$$\begin{aligned}
0^2 + 0 + 1 &= 1 \\
1^2 + 1 + 1 &= 1 + 1 + 1 \;=\; 1 \\
\alpha^2 + \alpha + 1 &= \alpha + 1 + \alpha + 1 \;=\; 0 \\
(\alpha + 1)^2 + (\alpha + 1) + 1 &= \alpha^2 + 1 + \alpha \;=\; \alpha + 1 + 1 + \alpha \;=\; 0
\end{aligned}$$

Also ist $A \;=\; \{x \in \mathbb{F}_4 : x^2 + x + 1 = 0\} \;=\; \{\alpha, \alpha + 1\}$.

(b) Wir rechnen in $\mathbb{F}_8$.

$$\begin{aligned}
0^2 + 0 + 1 &= 1 \\
1^2 + 1 + 1 &= 1 + 1 + 1 \;=\; 1 \\
\beta^2 + \beta + 1 &= \beta^2 + \beta + 1 \\
(\beta + 1)^2 + (\beta + 1) + 1 &= \beta^2 + 1 + \beta \;=\; \beta^2 + \beta + 1 \\
(\beta^2)^2 + \beta^2 + 1 &= \beta^4 + \beta^2 + 1 \;=\; \beta^2 + \beta + \beta^2 + 1 \;=\; \beta + 1 \\
(\beta^2 + 1)^2 + (\beta^2 + 1) + 1 &= \beta^4 + 1 + \beta^2 \;=\; \beta^2 + \beta + 1 + \beta^2 \;=\; \beta + 1 \\
(\beta^2 + \beta)^2 + (\beta^2 + \beta) + 1 &= \beta^4 + \beta^2 + \beta^2 + \beta + 1 \;=\; \beta^2 + \beta + \beta + 1 \;=\; \beta^2 + 1 \\
(\beta^2 + \beta + 1)^2 + (\beta^2 + \beta + 1) + 1 &= \beta^4 + (\beta + 1)^2 + \beta^2 + \beta \;=\; \beta^2 + \beta + \beta^2 + 1 + \beta^2 + \beta \;=\; \beta^2 + 1
\end{aligned}$$

Also ist $B \;=\; \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + 1 = 0\} \;=\; \emptyset$.

(c) Laut Skript §2.9 gilt

$$\begin{array}{rcl} \beta^{-1} & = & \beta^2+1 \\ (\beta^2)^{-1} & = & \beta^2+\beta+1 \\ (\beta+1)^{-1} & = & \beta^2+\beta\,. \end{array}$$

Also gilt

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{(x,y)\in\mathbb{F}_8^2 : x\cdot y = 1\} \\ & = & \{(1,1),(\beta,\beta^2+1),(\beta^2,\beta^2+\beta+1),(\beta+1,\beta^2+\beta), \\ & & \qquad (\beta^2+1,\beta),(\beta^2+\beta,\beta+1),(\beta^2+\beta+1,\beta^2)\}\,. \end{array}$$

(d) Wir rechnen in $\mathbb{F}_9$.

$$\begin{array}{rcl} 0^3 & = & 0 \\ 1^3 & = & 1 \\ (-1)^3 & = & -1 \\ \iota^3 & = & \iota^2\cdot\iota \;=\; -\iota \\ (-\iota)^3 & = & (-\iota)^2\cdot(-\iota) \;=\; \iota \\ (1+\iota)^3 & = & 1+\iota^3 \;=\; 1-\iota \\ (1-\iota)^3 & = & 1+(-\iota)^3 \;=\; 1+\iota \\ (-1+\iota)^3 & = & -1+\iota^3 \;=\; -1-\iota \\ (-1-\iota)^3 & = & -1+(-\iota)^3 \;=\; -1+\iota \end{array}$$

Also ist $D \;=\; \{x\in\mathbb{F}_9 : x^3\neq x\} = \{\iota,-\iota,1+\iota,1-\iota,-1+\iota,-1-\iota\} \;=\; \mathbb{F}_9\smallsetminus\mathbb{F}_3$.