Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 6

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 21 Bestimmen Sie die folgenden Mengen und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

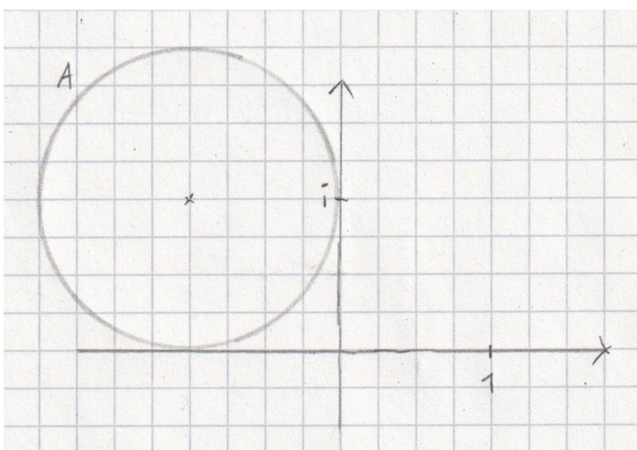
(a) $A := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z + 1 - \mathrm{i}| = 1 \,\}$

(b) $B := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z\mathrm{i} + \overline{z}) + \mathrm{Im}(z + \overline{z}\mathrm{i}) = 2 \,\}$

(c) $C := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z^4 = -8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) \,\}$

Lösung.

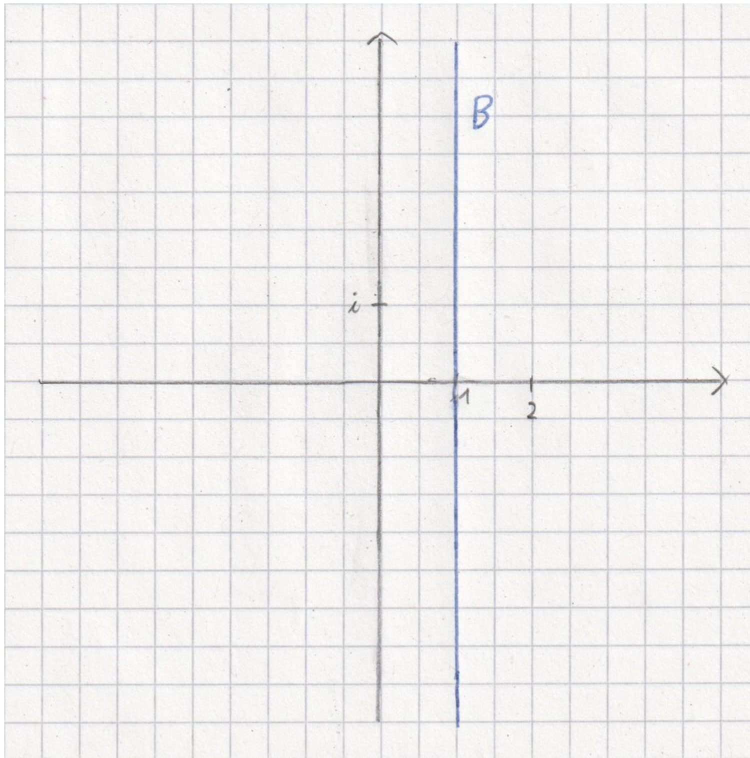
(a) Wir schreiben $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Damit ist $|z + 1 - \mathrm{i}|^2 - 1^2 = (a + 1)^2 + (b - 1)^2 - 1$. Also beschreibt A die Punkte (a, b) in der Gaußschen Zahlenebene, welche den Abstand 1 vom Punkt $(-1, 1)$ besitzen.



(b) Wir schreiben $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z\mathrm{i} + \overline{z}) + \mathrm{Im}(z + \overline{z}\mathrm{i}) &= \mathrm{Re}((a + b\mathrm{i})\mathrm{i} + a - b\mathrm{i}) + \mathrm{Im}(a + b\mathrm{i} + (a - b\mathrm{i})\mathrm{i}) \\
&= \mathrm{Re}(a\mathrm{i} - b + a - b\mathrm{i}) + \mathrm{Im}(a + b\mathrm{i} + a\mathrm{i} + b) \\
&= a - b + a + b = 2a
\end{aligned}$$

Also erhalten wir $B = \{\, a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,:\, 2a = 2 \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z) = 1 \,\}$.

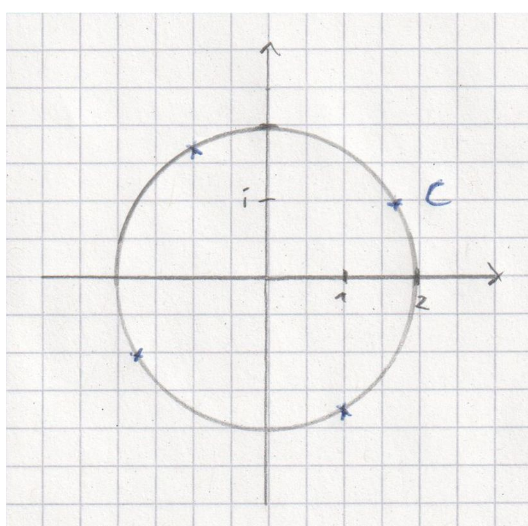


(c) Sei $w := -8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$. Dann ist

$$w = 16(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}) = 16(\cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3})).$$

Wir setzen $r := \sqrt[4]{16} = 2$ und $\varphi := \frac{\arg(w)}{4} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Damit ist

$$\begin{aligned} C &= \{\, r \cdot \big(\cos(\varphi + \tfrac{2\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \tfrac{2\pi}{4})\big) \ : \ k \in \{0,1,2,3\} \,\} \\ &= \{2\big(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{6})\big),\ 2\big(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{2\pi}{3})\big), \\ &\quad 2\big(\cos(\tfrac{7\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{7\pi}{6})\big),\ 2\big(\cos(\tfrac{5\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5\pi}{3})\big)\} \end{aligned}$$



Hausaufgabe 22

(a) Seien $f(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f(\overline{z}) = 0$ gilt.

(b) Sei $f(X) := X^3 + (1-\mathrm{i})X^2 + X + (1-\mathrm{i}) \in \mathbb{C}[X]$. Berechnen Sie $f(-1+\mathrm{i})$. Zerlegen Sie $f(X)$ in $\mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

(c) Zerlegen Sie $X^4 - \frac{4}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + 3X - \frac{2}{3} \in \mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

Lösung.

(a) Es gilt folgende Gleichung. Wegen $a_i \in \mathbb{R}$ können wir dabei $\overline{a_i} = a_i$ für $i \in \{0,1,2,3\}$ benutzen.

$$\begin{aligned} f(\overline{z}) &= a_3\overline{z}^3 + a_2\overline{z}^2 + a_1\overline{z} + a_0 \\ &= a_3\overline{z^3} + a_2\overline{z^2} + a_1\overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_3z^3} + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0} \\ &= \overline{f(z)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$f(X) = X^3 + (1-\mathrm{i})X^2 + X + (1-\mathrm{i}) = X^3 + X + (1-\mathrm{i})(X^2+1) = (X+1-\mathrm{i})(X^2+1).$$

Also ist $f(-1+\mathrm{i}) = 0$. Dies hätten wir auch durch eine direkte Rechnung überprüfen können.

Es hat X^2+1 die Nullstellen i und $-\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$. Also ist

$$f(X) = (X+1-\mathrm{i})(X^2+1) = (X+1-\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$$

eine Zerlegung von $f(X)$ in Faktoren von Grad 1.

Es ist $\overline{-1+\mathrm{i}} = -1-\mathrm{i}$ keine Nullstelle von $f(X)$. Also gilt die Aussage aus Teil (a) nicht für Polynome, deren Koeffizienten nicht in $\mathbb{R}$ liegen.

(c) Zunächst bestimmen wir die Nullstellen von $g(X) := X^4 - \frac{4}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + 3X - \frac{2}{3}$, die in $\mathbb{Q}$ liegen.

Dazu bestimmen wir die Nullstellen von $3X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 9X - 2$, welche die Form $\frac{u}{v}$ mit u und v aus $\mathbb{Z}$ teilerfremd haben.

Es ist u ein Teiler von -2, also $u \in \{-2,-1,1,2\}$. Es ist v ein Teiler von 3, also $v \in \{-3,-1,1,3\}$. Eine direkte Rechnung ergibt die folgenden Werte.

$\frac{u}{v}$	2	-2	1	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$f(\frac{u}{v})$	0	28	-2	-12	$-\frac{4}{27}$	$-\frac{88}{9}$	0	$-\frac{154}{27}$

Also sind 2 und $\frac{1}{3}$ Nullstellen von $g(X)$. Eine Polynomdivision ergibt damit die Faktorisierung $g(X) = (X-2)(X-\frac{1}{3})(X^2+X-1)$.

Weiterhin ist $X^2+X-1 = (X+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = (X+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})(X+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})$.

Insgesamt erhalten wir also $g(X) = (X-2)(X-\frac{1}{3})(X+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))(X+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))$.

Hausaufgabe 23 Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}, \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

(a) Berechnen Sie $(A+B)^2$ und $A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

(c) Bestimmen Sie die Inversen $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.
Bestimmen Sie $C \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit $B \cdot C = \mathrm{E}_4$.

Lösung.

(a) Wir rechnen wie folgt.

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 5 & -3 \\ 27 & 17 & 17 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 13 & 0 & -11 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ -2 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & 20 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Da A und B nicht kommutieren, ist $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Aus Teil (a) kennen wir bereits A^2. Wir bestimmen noch A^3.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist für $n \geqslant 4$ ebenfalls $A^n = A^{n-3} \cdot A^3 = A^{n-3} \cdot 0 = 0$.

(c) Wir berechnen die Inversen mit der Formel aus Abschnitt 3.1 des Skriptes.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir setzen

$$C := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrizen blockweise multipliziert werden, gilt nun auch $B \cdot C = \mathrm{E}_4$.

Hausaufgabe 24 Sei K ein Körper.
Zeigen Sie, dass für $t \in K$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ folgende Gleichung gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2(n-2)nt^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gilt diese Gleichung auch noch für $n = -1$?

Lösung. Wir führen eine Induktion über $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ nach dem speziellen Induktionsprinzip.
Induktionsanfang. Es gilt folgende Gleichung für $n = 0$ und $t \in K$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 0 \cdot t & 2(-2) \cdot 0 \cdot t^2 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 0 \cdot t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 1$ und $t \in K$. Als Induktionsvoraussetzung verwenden wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1)t & 2(n-3)(n-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2(n-1)t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2(n-2)nt^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu folgern.

In der Tat gilt

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1)t & 2(n-3)(n-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2(n-1)t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2t + 2(n-1)t & -2t^2 + 4(n-1)t^2 + 2(n-3)(n-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2t + 2(n-1)t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & -2t^2 + 4nt^2 - 4t^2 + 2n^2t^2 - 8nt^2 + 6t^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2n^2t^2 - 4nt^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2(n-2)nt^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also gilt die Gleichung für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.
Nun überprüfen wir, ob die Matrizen für $n = 1$ und $n = -1$ zueinander invers sind.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2t & 2(-3)(-1)t^2 \\ 0 & 1 & -2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Also gilt die Gleichung auch für $n = -1$:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2t & 6t^2 \\ 0 & 1 & -2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$