Künzer, Nitsche, Ritter

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 7

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 25 Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}, \qquad b := \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 3 \\ 9 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 1}.$$

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{Q}^{5\times 1} : Ax = 0\}$.

(c) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{Q}^{5\times 1} : Ax = b\}$.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & 2 & -\frac{32}{3} & -\frac{47}{3} \\ 0 & 3 & 3 & 1 & \frac{17}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(b) Unter Verwendung von (a) erhalten wir

$$\{x \in \mathbb{Q}^{5\times 1} : Ax = 0\} = {}_{\mathbb{Q}}\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \boxed{0} \\ \frac{1}{3} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternativ können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{x \in \mathbb{Q}^{5\times 1} : Ax = 0\} \;=\; \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \boxed{0} \\ \frac{1}{3} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : \lambda_1\,, \lambda_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

(c) Unter Verwendung von (a, b) erhalten wir

$$\{x \in \mathbb{Q}^{5\times 1} : Ax = b\} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \boxed{0} \\ -\frac{1}{3} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + {}_{\mathbb{Q}}\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \boxed{0} \\ \frac{1}{3} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternativ können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{x \in \mathbb{Q}^{5\times 1} : Ax = b\} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \boxed{0} \\ -\frac{1}{3} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \boxed{0} \\ \frac{1}{3} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : \lambda_1\,, \lambda_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

Die Kästchen sind nur als Hilfestellung gedacht und müssen nicht geschrieben werden.

Hausaufgabe 26 Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1+2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 2 & -2 & 1 & 1+3\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \\ -1 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 5}$ und $b := \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{C}^{5\times 1} : Ax = 0\}$.

(c) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{C}^{5\times 1} : Ax = b\}$.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1+2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 2 & -2 & 1 & 1+3\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -1 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1+2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1 & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(b) Unter Verwendung von (a) erhalten wir

$$\{x \in \mathbb{C}^{5\times 1} : Ax = 0\} \;=\; {}_{\mathbb{C}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ -1-\mathrm{i} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternativ können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{x \in \mathbb{C}^{5\times 1} : Ax = 0\} \;=\; \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ -1-\mathrm{i} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : \lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

(c) Unter Verwendung von (a, b) erhalten wir

$$\{x \in \mathbb{C}^{5\times 1} : Ax = b\} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{0} \\ 1+\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + {}_{\mathbb{C}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ -1-\mathrm{i} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternativ können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{x \in \mathbb{C}^{5\times 1} : Ax = b\} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{0} \\ 1+\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ -1-\mathrm{i} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -\mathrm{i} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : \lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

Die Kästchen sind nur als Hilfestellung gedacht und müssen nicht geschrieben werden.

Hausaufgabe 27 Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 1+\beta & \beta & \beta^2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^2 & 0 & 1 \\ 1 & \beta & \beta^2+\beta & \beta^2+\beta & 1 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_8^{3\times 6}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\beta \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_8^{3\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{F}_8^{6\times 1} : Ax = 0\}$.

(c) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{F}_8^{6\times 1} : Ax = b\}$.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$(A|b) \;=\; \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \beta & 0 & 1+\beta & \beta & \beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^2 & 0 & 1 & 1+\beta \\ 1 & \beta & \beta^2+\beta & \beta^2+\beta & 1 & \beta & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \beta & 0 & 1+\beta & \beta & \beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^2 & 0 & 1 & 1+\beta \\ 0 & 0 & \beta^2+\beta & \beta^2+1 & 1+\beta & \beta^2+\beta & 1+\beta \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \beta & 0 & 1+\beta & \beta & \beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^2 & 0 & 1 & 1+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\beta & 0 & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \beta & 0 & 1+\beta & \beta & \beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^2 & 0 & 1 & 1+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta^2+\beta+1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \beta & 0 & 1+\beta & 0 & \beta^2 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^2 & 0 & 1 & 1+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta^2+\beta+1 \end{array}\right)$$

(b) Unter Verwendung von (a) erhalten wir

$$\{x \in \mathbb{F}_8^{6\times 1} : Ax = 0\} \;=\; {}_{\mathbb{F}_8}\left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\beta \\ \boxed{0} \\ \beta^2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternativ können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{x \in \mathbb{F}_8^{6\times 1} : Ax = 0\} \;=\; \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} \beta \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1+\beta \\ \boxed{0} \\ \beta^2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : \lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3 \in \mathbb{F}_8 \right\}$$

(c) Unter Verwendung von (a, b) erhalten wir

$$\{x \in \mathbb{F}_8^{6\times 1} : Ax = b\} \;=\; \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \boxed{0} \\ 1+\beta \\ \boxed{0} \\ \beta^2+\beta+1 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + {}_{\mathbb{F}_8}\!\left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\beta \\ \boxed{0} \\ \beta^2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternativ können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{x \in \mathbb{F}_8^{6\times 1} : Ax = 0\} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \boxed{0} \\ 1+\beta \\ \boxed{0} \\ \beta^2+\beta+1 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \beta \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1+\beta \\ \boxed{0} \\ \beta^2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} : \lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3 \in \mathbb{F}_8 \right\}$$

Die Kästchen sind nur als Hilfestellung gedacht und müssen nicht geschrieben werden.

Hausaufgabe 28

(a) Bestimmen Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Bestimmen Sie $M := \{\, t \in \mathbb{R} \;:\; A_t \text{ ist invertierbar} \,\}$. Bestimmen Sie A_t^{-1} für $t \in M$.

Lösung.

(a) Sei $T := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$. Wir rechnen.

$$(T|E_4) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist also $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Wir rechnen.

$$(A_t|\mathrm{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1-t & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3t-2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Anhand der dritten Zeile sehen wir nun, dass A_t für $t = 2$ nicht invertierbar ist.

Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Wir rechnen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3t-2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3t-2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2-t} & \frac{1}{2-t} & \frac{1}{2-t} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3(2-t)} & -\frac{2+t}{3(2-t)} & -\frac{3t-2}{3(2-t)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3(2-t)} & \frac{1-t}{3(2-t)} & -\frac{1}{3(2-t)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2-t} & \frac{1}{2-t} & \frac{1}{2-t} \end{array}\right)$$

Insgesamt ist also $M = \{\, t \in \mathbb{R} : A_t \text{ ist invertierbar} \,\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Für $t \in M$ gilt

$$A_t^{-1} = \frac{1}{3(t-2)} \begin{pmatrix} -4 & t+2 & 3t-2 \\ -1 & t-1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$