Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 8

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 29 Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_s := \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ 2 \\ 5s \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R} : v \mapsto u^{\mathrm{t}} v$.

(a) Gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, für welches $(x,\, y,\, w_s)$ linear abhängig ist?

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist $(u,\, x,\, y,\, w_s)$ ein erzeugendes Tupel in $\mathbb{R}^{4\times 1}$?

(c) Bestimmen Sie $\dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1}))$. Bestimmen Sie damit $\dim(\mathrm{Kern}(f))$.

(d) Gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, für welches $(x,\, y,\, w_s)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ ist?

Lösung.

(a) Wir bilden die Matrix A_s mit den Vektoren x, y und w_s als Spalten.

$$A_s := \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & 2 & 2s \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5s \end{pmatrix}$$

Das Gaußverfahren liefert die folgende Umformung von A_s.

$$A_s \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 4 & 2+s \\ 0 & 4 & 5s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 2-3s \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform von A_s ist unabhängig von s und enthält keine Nichtstufenspalten. Also gibt es kein $s \in \mathbb{R}$, für welches $(x,\, y,\, w_s)$ linear abhängig ist.

(b) Wir bilden die Matrix B_s mit Spalten u, x, y und w_s.

$$B_s := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ 0 & 1 & 2 & 2s \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5s \end{pmatrix}$$

Das Gaußverfahren liefert die folgende Umformung von B_s.

$$B_s \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ 0 & 1 & 2 & 2s \\ 0 & -2 & 2 & 2-s \\ 0 & 1 & 5 & 6s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -s \\ 0 & 1 & 2 & 2s \\ 0 & 0 & 6 & 2+3s \\ 0 & 0 & 3 & 4s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}-\frac{s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}+s \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+\frac{s}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{5s}{2} \end{pmatrix}$$

Ist nun $-1+\frac{5s}{2} \neq 0$, so erhalten wir die Zeilenstufenform $\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$. Ist $-1+\frac{5s}{2} = 0$, also $s = \frac{2}{5}$, erhalten wir die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist (u, x, y, w_s) ein erzeugendes Tupel in $\mathbb{R}^{4\times 1}$ für $s \neq \frac{2}{5}$.

(c) Es ist $f(\left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1&-1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \neq 0$. Also ist $\dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1}))$ mindestens 1. Als Unterraum von $\mathbb{R}$ hat $f(\mathbb{R}^{4\times 1})$ jedoch höchstens die Dimension 1. Zusammen erhalten wir $\dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1})) = 1$.

Die Dimensionsformel $\dim(\mathbb{R}^{4\times 1}) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1}))$ ergibt nun

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathbb{R}^{4\times 1}) - \dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1})) = 4 - 1 = 3.$$

(d) Nach Teil (a) ist das Tupel (x, y, w_s) für alle $s \in \mathbb{R}$ linear unabhängig. Nach Teil (c) hat $\mathrm{Kern}(f)$ die Dimension 3. Also ist (x, y, w_s) eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$, falls alle drei Vektoren in $\mathrm{Kern}(f)$ liegen. Es wird:

$$f(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1&-1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1\\1\\-1\\0 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

$$f(y) = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1&-1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

$$f(w_s) = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1&-1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} s\\2s\\2\\5s \end{smallmatrix}\right) = 2 - 4s$$

Es ist $2 - 4s = 0$ für $s = \frac{1}{2}$. Damit ist (x, y, w_s) eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ für $s = \frac{1}{2}$.

Hausaufgabe 30 Gegeben sind die folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_5^{5\times 1}$.

$$T := {}_{\mathbb{F}_5}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad U := {}_{\mathbb{F}_5}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von T und eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T + U$ und eine Basis von $T \cap U$.

Lösung.

(a) Wir bestimmen zuerst eine Basis von T. Der Gaußalgorithmus ergibt die folgenden Umformungen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ eine Basis von T.

Wir bestimmen eine Basis von U. Der Gaußalgorithmus ergibt die folgenden Umformungen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$ eine Basis von U.

(b) Wir bestimmen eine Basis von $T+U$ und $T\cap U$. Der Gaußalgorithmus ergibt die folgenden Umformungen mit den Basen aus Teil (a).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sind $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 3$ und $\ell_4 = 3$ die Stufenspaltenpositionen dieser Zeilenstufenform. Also ist eine Basis von $T + U$ gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Eine Basis von $\{ x \in \mathbb{F}_5^{6\times 1} : Ax = 0 \}$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Also ist eine Basis von $T \cap U$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &\left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ =&\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Zur Probe können wir die Dimensionsformel $\dim(T) + \dim(U) = \dim(T + U) + \dim(T \cap U)$ verwenden. In der Tat ist

$$\dim(T) + \dim(U) = 3 + 3 = 6$$

und

$$\dim(T + U) + \dim(T \cap U) = 4 + 2 = 6.$$

Hausaufgabe 31 Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$u_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -s \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad w_s = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche der Rauminhalt des von u_s, v und w_s aufgespannten Parallelepipeds gleich 1 ist.

(b) Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto v \times \begin{pmatrix} d \\ b+c \\ a \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Matrix A mit $f = \mathrm{mult}_A$. Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$ und $\dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1}))$.

Lösung.

(a) Der Rauminhalt des von u_s, v und w_s aufgespannten Parallelepipeds ist gegeben durch $|u_s^{\mathrm{t}}(v \times w_s)|$. Es gilt

$$|u_s^{\mathrm{t}}(v \times w_s)| = |\begin{pmatrix} 0 & 5 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2s-8 \\ -s \end{pmatrix}| = |s^2 - 10s - 40|$$

Wir führen eine Fallunterscheidung durch, um die Gleichung $|s^2 - 10s - 40| = 1$ zu lösen. Der erste Fall $s^2 - 10s - 41 = 0$ ergibt die Lösungen $5 + \sqrt{66}$ und $5 - \sqrt{66}$. Der zweite Fall $s^2 - 10s - 39 = 0$ ergibt die Lösungen -3 und 13.

Insgesamt ist die Gleichung $|u_s^{\mathrm{t}}(v \times w_s)| = 1$ also für $s \in \{5 + \sqrt{66},\, 5 - \sqrt{66},\, -3,\, 13\}$ erfüllt.

(b) Es ist $f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}) \mapsto v \times \begin{pmatrix} d \\ b+c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ b+c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+2c \\ -4a-2d \\ 4b+4c-d \end{pmatrix}$. Abbilden der Standardbasis ergibt die Spalten der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann $f = \mathrm{mult}_A$.

Wir bestimmen die Zeilenstufenform von A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform von A hat 2 Stufenspalten. Also ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$. Damit wird

$$\dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1})) = \dim(\mathrm{mult}_A(\mathbb{R}^{4\times 1})) = \mathrm{Rang}(A) = 2.$$

Hausaufgabe 32 Wir nehmen zur Kenntnis und dürfen verwenden: Für einen Körper K und $n \geqslant 0$ ist $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ eine Basis von $K[X]_{\leqslant n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(X-1,\, X+1,\, X^2+1,\, X^3+1)$ eine Basis von $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine bijektive lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$, für welche $\varphi(X+1) = X^2+1$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\psi : \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2} \to \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 1} : f(X) \mapsto X \cdot f(-1) - f(1)$ eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{F}_3}(\psi(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2}))$ und $\dim_{\mathbb{F}_3}(\mathrm{Kern}(\psi))$.

Lösung. Wir benutzen, dass $\dim(K[X]_{\leqslant n}) = n+1$ gilt, da $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ eine Basis von $K[X]_{\leqslant n}$ ist. Insbesondere ist $\dim(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}) = 4$.

(a) Da $(X-1,\, X+1,\, X^2+1,\, X^3+1)$ vier Elemente hat, reicht es zu zeigen, dass dieses Tupel linear unabhängig ist.

Seien λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4 in $\mathbb{R}$ mit $\lambda_1(X-1) + \lambda_2(X+1) + \lambda_3(X^2+1) + \lambda_4(X^3+1) = 0$ gegeben. Ausmultiplizieren ergibt $(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_3 X^2 + \lambda_4 X^3 = 0$. Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem, da $(1, X, X^2, X^3)$ eine Basis ist.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

Das Gaußverfahren liefert folgende Umformungen.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ und $(X-1,\, X+1,\, X^2+1,\, X^3+1)$ ist eine Basis von $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$.

Alternativ können wir überprüfen, dass $(X-1,\, X+1,\, X^2+1,\, X^3+1)$ erzeugend in $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$ ist. Wir zeigen, dass die Basis $(1, X, X^2, X^3)$ im Erzeugnis von $(X-1,\, X+1,\, X^2+1,\, X^3+1)$ enthalten ist.

$$\begin{aligned} -(X+1) + (X-1) &= 1 \\ -(X+1) - (X-1) &= X \\ (X+1) - (X-1) + (X^2+1) &= X^2 \\ (X+1) - (X-1) + (X^3+1) &= X^3 \end{aligned}$$

Da $(1, X, X^2, X^3)$ erzeugend in $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$ ist, ist damit auch $(X-1,\, X+1,\, X^2+1,\, X^3+1)$ erzeugend in $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$.

(b) Wir können eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$ definieren, in dem wir die Bilder einer Basis von $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$ vorgeben. Ergeben diese Bilder wieder eine Basis von $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$, so ist die Abbildung bijektiv. Wir setzen

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1\\ \varphi(X) &= X^2\\ \varphi(X^2) &= X\\ \varphi(X^3) &= X^3.\end{aligned}$$

Dies ist eine bijektive lineare Abbildung mit $\varphi(X+1) = \varphi(X) + \varphi(1) = X^2 + 1$.

Es gibt noch zahlreiche weitere mögliche Wahlen von φ.

(c) Wir zeigen, dass ψ eine lineare Abbildung ist. Seien dazu $f, g \in \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2}$ und $\lambda,\ \mu \in \mathbb{F}_3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\psi(\lambda \cdot f(X) + \mu \cdot g(X)) &= X \cdot (\lambda \cdot f(-1) + \mu \cdot g(-1)) - (\lambda \cdot f(1) + \mu \cdot g(1))\\ &= X \cdot \lambda \cdot f(-1) - \lambda \cdot f(1) + X \cdot \mu \cdot g(-1) - \mu \cdot g(1)\\ &= \lambda \cdot (X \cdot f(-1) - f(1)) + \mu \cdot (X \cdot g(-1) - g(1))\\ &= \lambda \cdot \psi(f(X)) + \mu \cdot \psi(g(X)).\end{aligned}$$

Wir bestimmen $\psi(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2})$.

Es ist $\psi(1) = X - 1$. Es ist $\psi(X) = -X - 1$. Es ist $\psi(X^2) = X - 1$.

Das Tupel $(X-1, -X-1, X-1)$ ist erzeugend in $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 1}$, da $(X-1) + (-X-1) = 1$ und $-(X-1) + (-X-1) = X$ gilt und da $(1, X)$ eine Basis in $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 1}$ ist.

Damit erhalten wir

$$\dim(\psi(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2})) = \dim(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 1}) = 2.$$

Mit der Dimensionsformel $\dim(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2}) = \dim(\mathrm{Kern}(\psi)) + \dim(\psi(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2}))$ wird

$$\dim(\mathrm{Kern}(\psi)) = \dim(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2}) - \dim(\psi(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2})) = 3 - 2 = 1.$$